Untersuchung einer zwei—vierdeutigen kinetographischen Verwandtschaft.

Von der

K. Technischen Hochschule zu München

zur

Erlangung der Würde eines

Doktors der technischen Wissenschaften

genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Heinrich Rieder

Assistent an der K. Technischen Hochschule zu München.

Referent: **Prof. Dr. L. Burmester.**

Korreferent: **Prof. Dr. S. Finsterwalder.**

Tag der mündlichen Prüfung: 4. März 1907.

München 1907

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

Untersuchung einer zwei—vierdeutigen kinetographischen Verwandtschaft.

Von der

K. Technischen Hochschule zu München

zur

Erlangung der Würde eines

Doktors der technischen Wissenschaften

genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Heinrich Rieder

Assistent an der K. Technischen Hochschule zu München.

ACAD. UNIV. BAT. BIBL.

Referent:
Prof. Dr. L. Burmester.

Korreferent:
Prof. Dr. S. Finsterwalder.

Tag der mündlichen Prüfung: 4. März 1907.

München 1907
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

Zu der vorliegenden Abhandlung wurde ich von Herrn Professor Dr. L. Burmester angeregt, der mir auch bei der Abfassung derselben seine Unterstützung zuteil werden ließ.

Möge es mir gestattet sein, hierfür auch an dieser Stelle meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

§ 1.

Allgemeine Erörterungen. Erklärung der Verwandtschaft an einem Apparat.

Die Gesamtheit aller in einer Ebene liegenden Punkte, welche ihre gegenseitige Lage nicht ändern, nennen wir ein starres ebenes System oder auch kurz ein ebenes System.

Die Bewegung eines ebenen Systems S in einem festen anderen ebenen System Σ wird dadurch bestimmt, daß zwei Punkte des Systems S sich auf gegebenen Bahnen in dem System Σ bewegen. Jeder Punkt des Systems S beschreibt während der Bewegung eine Kurve in dem System Σ und gleichzeitig beschreibt jeder Punkt des Systems Σ eine Kurve in dem System S.

Den Punkten $A_0, B_0, \ldots$ einer in dem System S angenommenen Kurve i ordnen wir nun eindeutig die Punkte A_0, $\mathsf{B}_0, \ldots$ einer in dem System Σ angenommenen Kurve ε zu; dann beschreibt ein Punkt A_0 der Kurve i des bewegten Systems S eine Kurve α in dem festen System Σ und ferner beschreibt der zugeordnete Punkt A_0 der Kurve ε des festen Systems Σ eine Kurve a in dem bewegten System S. Auf diesen beiden Kurven α, a sind in jedem Bewegungsmoment der Punkt A der Kurve α, welcher sich mit dem beschreibenden Punkt A_0 deckt, und der Punkt A der Kurve a, welcher sich mit dem beschreibenden Punkt A_0 deckt, entsprechende Punkte in den Systemen Σ, S.

Die hierdurch definierte Verwandtschaft der beiden Systeme S, Σ nennen wir nach Herrn Professor Burmester, der

in seiner Vorlesung über Kinematik auf die große Gruppe solcher Verwandtschaften hingewiesen hat, eine kinetographische Verwandtschaft der Systeme S und Σ; ferner nennen wir S und Σ zwei kinetographisch aufeinander bezogene ebene Systeme.[1])

Entsprechende Punkte zweier kinetographisch aufeinander bezogener ebener Systeme S und Σ sind also solche Punkte, welche sich im gleichen Bewegungsmoment mit entsprechenden Punkten der Kurven i und ε decken.[2])

Sämtliche Punkte der Kurve i beschreiben während der Bewegung von S in Σ eine Kurvenschar τ in Σ, während gleichzeitig die Punkte der Kurve ε eine Kurvenschar t in S beschreiben. Zwei Kurven der Scharen t und τ sind entsprechende Kurven, wenn sie von zugeordneten Punkten der Kurven i und ε beschrieben werden.

Die Kurve i deckt sich während der Bewegung mit den ihr kongruenten Kurven einer Kurvenschar $\varkappa$ in Σ; gleichzeitig gelangt die Kurve ε mit den ihr kongruenten Kurven einer Schar k in S zur Deckung. Zwei zu den Scharen k und $\varkappa$ gehörende Kurven, welche im gleichen Bewegungsmoment sich mit ε bzw. i decken, sind entsprechende Kurven.

Eine Punktverwandtschaft zwischen zwei ebenen Systemen kann zweckmäßig unter Zuhilfenahme von krummlinigen Koordinaten oder Parametern bestimmt werden. Bei einer kinetographischen Verwandtschaft wird man dieselben so wählen, daß die Scharen t und k bzw. τ und $\varkappa$ aus den Parameterkurven bestehen. Denn entsprechende Punkte der beiden ebenen

---

[1]) Die Definition der kinetographischen Verwandtschaft kann dadurch noch erweitert werden, daß man die Zuordnung der Punkte der Kurven i und ε nicht eindeutig, sondern mehrdeutig wählt.

[2]) Nach dem Prinzip von Chasles kann jede Bewegung eines Systems S in einem festen System Σ umgekehrt werden und es ist klar, daß die kinetographische Verwandtschaft zwischen S und Σ bei gleicher Wahl der Kurven i und ε und gleicher Zuordnung ihrer Punkte dieselbe bleibt, wenn man statt einer Bewegung die Umkehrung dieser Bewegung zu Grunde legt.

Systeme sind stets Schnittpunkte einerseits von Kurven der Scharen t und k, andererseits von den entsprechenden Kurven der Scharen τ und $\varkappa$.

Gegenstand dieser Abhandlung soll nun die spezielle kinetographische Verwandtschaft sein, welche wir erhalten, wenn die Bewegung des Systems S zu Grunde gelegt wird, bei der zwei Punkte von S auf zwei Geraden in Σ geführt werden, wenn ferner für die Kurven i und ε zwei Gerade in speziellen Lagen angenommen werden und die Zuordnung der Punkte von i zu den Punkten von ε eindeutig bestimmt wird.

Die erwähnte spezielle Bewegung des Systems S wird als elliptische Bewegung bezeichnet und kann auch dadurch erzeugt werden, daß in Fig. 1 ein Kreis p_0 mit dem Radius $\frac{1}{2} R$ in S innerhalb eines Kreises π_0 mit dem Radius R in Σ rollt.[1]) Im folgenden soll diese Erzeugung der elliptischen Bewegung angenommen werden.

Für die beiden Kurven i, ε nehmen wir die beiden im Anfang der Bewegung sich deckenden Geraden, welche durch die Mittelpunkte der Kreise p_0, π_0 gehen. Die eindeutige Zuordnung der Punkte von i zu den Punkten von ε bestimmen wir dadurch, daß wir die in der Anfangslage sich deckenden Punkte einander zuweisen. Damit ist dann nach der obigen Definition eine kinetographische Verwandtschaft zwischen S und Σ bestimmt, die untersucht werden soll.

Zunächst wollen wir die vier Kurvenscharen t und k bzw. τ und $\varkappa$ betrachten, welche hier auftreten.

Wir wählen zwei sich in der Anfangslage deckende Punkte A_0, A_0 der beiden Geraden i und ε. Rollt nun der Kreis p_0 an dem Kreise π_0, so beschreibt der Punkt A_0 eine Ellipse α in dem System Σ, bei der die Summe oder die Differenz der Halbachsen gleich dem Radius R ist, jenachdem die beiden erzeugenden Punkte A_0, A_0 innerhalb oder außerhalb des rollenden Kreises liegen; gleichzeitig beschreibt der feste Punkt A_0 eine allgemeine Kardioide a in dem System S, deren

[1]) Burmester, Lehrbuch der Kinematik, 1888, S. 37.

Doppelpunkt im Bewegungsanfang in dem Berührpunkt O des rollenden Kreises und des festen Kreises liegt.[1]) Demnach ergibt sich:

Die Schar τ besteht aus einfach unendlich vielen Ellipsen, bei denen die Summe bzw. die Differenz ihrer Halbachsen gleich dem Radius R ist. Sie besitzen alle die Gerade ε und die Senkrechte η auf derselben im Mittelpunkt des festen Kreises π_0 als gemeinsame Symmetrallinien.

Die Schar t besteht aus einfach unendlich vielen allgemeinen Kardioiden, welche einen gemeinsamen Doppelpunkt haben, der im Anfang der Bewegung in dem Berührpunkt O des rollenden Kreises und des festen Kreises liegt und die ferner die Gerade i als gemeinsame Symmetrallinie besitzen. Der Doppelpunkt kann je nach der Lage des beschreibenden Punktes auch ein isolierter Punkt oder eine Spitze sein.

Da der Punkt O während der Bewegung sich auf der Geraden ε bewegt, so folgt:

Die Schar k ist ein Strahlbüschel, dessen Strahlen durch den gemeinsamen Doppelpunkt O der Kardioiden der Schar t gehen.

Während der Punkt O sich auf der Geraden ε bewegt, wird der Endpunkt D des Durchmessers $O\,D$ des rollenden Kreises auf der Geraden η geführt, wobei also die Strecke $O\,D$ gleich R ist. Demnach ergibt sich:

Die Schar $\varkappa$ ist die Gesamtheit der Tangenten an eine Astroide δ, bei der die Länge der Achsen gleich $2\,R$ ist und die ferner die beiden zueinander senkrechten Geraden ε, η als Symmetrallinien hat.

In der kinematischen Sammlung der technischen Hochschule in München befindet sich ein nach den Angaben des Herrn Professor Burmester ausgeführter Apparat, welcher dazu benützt werden kann, um die entsprechenden Punkte der beiden kinetographisch aufeinander bezogenen ebenen Systeme S und Σ zu bestimmen.

---

[1]) Burmester, a. a. O., S. 36—42.

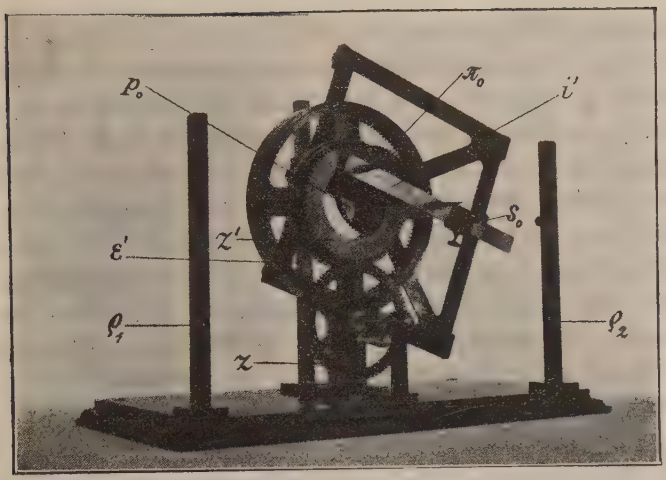

p_0
π_0
i'
s_0
ε'
χ'
ϱ_1
ϱ_2
z

Fig. 1.

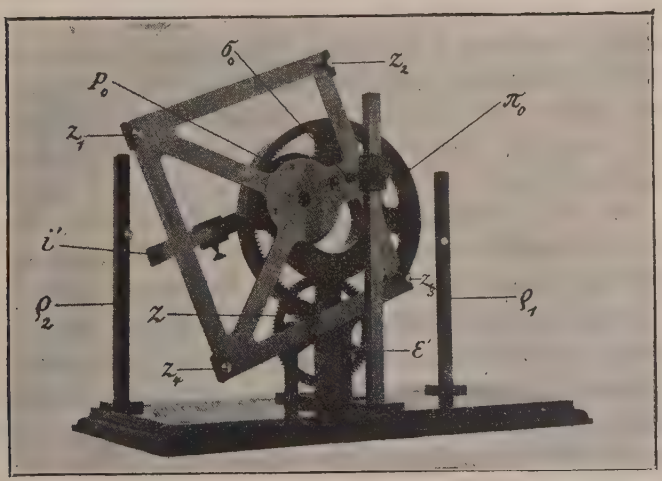

σ_0
z_2
p_0
π_0
z_1
i'
ϱ_2
z
z_3
ϱ_1
ε'
z_4

Fig. 2.

Das Rollen des Kreises p_0 innerhalb des doppelt so großen Kreises π_0 wird an dem Apparat dadurch bewirkt, daß ein Zahnrad p_0 in ein innen verzahntes auf einem Gestell befestigtes Zahnrad π_0 eingreift. Die Bewegung des Zahnrades p_0 wird mittels einer Kurbel hervorgebracht, auf deren Welle ein Zahnrad z befestigt ist. Dasselbe greift in ein Zahnrad z', welches in dem Körper des innen verzahnten Rades konzentrisch ringförmig gelagert ist und die Achse des umlaufenden Rades p_0 trägt.[1]) Parallel zu den Radebenen ist eine matte Glasscheibe, welche das ebene System Σ vertritt, in die Rillen zweier Säulen ϱ_1, ϱ_2 eingeschoben. Eine zweite matte Glasscheibe, welche das ebene System S vertritt, ist parallel zu den Radebenen fest mit dem umlaufenden Rad p_0 verbunden und wird durch die vier Klemmschrauben z_1, z_2, z_3, z_4 gehalten. Auf einer prismatischen Säule ε' befindet sich eine verstellbare Hülse, die einen auf der Mattscheibe S schreibenden Stift σ_0 trägt. In den verschiedenen Stiftstellungen liegen die Spitzen des Stiftes σ_0 auf einer geraden Linie ε, welche die geometrische Achse des innen verzahnten Rades π_0 schneidet. Mit der verlängerten Achse des umlaufenden Rades ist ein prismatischer Stab i' fest verbunden; auf diesem Stab befindet sich eine verstellbare Hülse, die einen auf der Mattscheibe Σ schreibenden Stift s_0 trägt. Die Spitzen in den verschiedenen Stiftstellungen des Stiftes s_0 liegen auf einer Geraden i. In einer Anfangslage, von der die Bewegung des umlaufenden Rades ausgehen soll, ist die Gerade i parallel der Geraden ε und die senkrechten Projektionen dieser Geraden auf eine Radebene decken sich.

Ordnen wir nun Stiftstellungen, in welchen die Spitzen der Stifte im Anfang der Bewegung in einer Senkrechten zu den Radebenen liegen, einander zu, so ist damit die kinetographische Verwandtschaft zwischen S und Σ an dem Apparat bestimmt.

---

[1]) Vgl. auch: Deutsche Mathematiker Vereinigung, Nachtragskatalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, 254a.

Es sollen nun zu einem Punkte A des ebenen Systems S mit Hilfe des Apparates die ihm entsprechenden Punkte in dem System Σ bestimmt werden.

Entsprechende Punkte müssen sich gemäß der obigen Definition bzw. mit den Spitzen der Stifte s_0 und σ_0 in entsprechenden Einstellungen dieser Stifte im gleichen Bewegungsmoment decken. Wir lassen nun das Zahnrad p_0 einen Umlauf innerhalb des festen Rades π_0 ausführen. Die beiden ebenen Systeme S und Σ werden im Anfang der Bewegung durch die beiden Geraden ε bzw. i je in zwei Teile S_1, S_2 bzw. Σ_1, Σ_2 getrennt. Im Anfang der Bewegung decken sich die Projektionen von S_1 und Σ_1 bzw. von S_2 und Σ_2 auf eine der Radebenen. Ist die Bewegung soweit ausgeführt, daß der Mittelpunkt des umlaufenden Rades p_0 einen Halbkreis beschrieben hat, so decken sich die Projektionen von S_1 und Σ_2 bzw. von S_2 und Σ_1; am Ende der Bewegung decken sich wieder die von S_1 und Σ_1 bzw. von S_2 und Σ_2. Es wird also der Punkt A während des Umlaufes sich in zwei Stiftstellungen auf der Säule ε' mit der Spitze des Stiftes σ_0 decken. Die zwei so erhaltenen Einstellungen seien A_0^1 und A_0^2. Ihnen entsprechen zwei Stiftstellungen A_0^1 und A_0^2 auf dem Stabe i'. Hierauf stellen wir

1. den Stift s_0 auf A_0^1, den Stift σ_0 auf A_0^1,
2. den Stift s_0 auf A_0^2, den Stift σ_0 auf A_0^2

und bewegen das Zahnrad p_0 in den beiden Fällen so weit, daß die Spitze des Stiftes σ_0 sich gerade mit dem Punkt A deckt; dann deckt sich in jedem dieser Bewegungsmomente die Spitze des Stiftes s_0 mit einem dem Punkte A entsprechenden Punkt des Systems Σ. Beide entsprechenden Punkte mögen A_1 und A_2 heißen und wir erhalten den Satz:

Einem Punkt A des ebenen Systems S sind zwei Punkte A_1, A_2 des ebenen Systems Σ zugeordnet.

Es sollen nun andererseits zu einem Punkt A des Systems Σ die entsprechenden Punkte des Systems S gefunden werden.

Während eines Umlaufes des Rades p_0 deckt sich die Gerade i nacheinander mit den Tangenten an die Astroide δ in Σ. Diese Kurve ist von der vierten Klasse,[1]) und es gehen demnach von einem Punkt des Systems Σ vier Tangenten an dieselbe, von denen auch zwei imaginär sein können. Daraus folgt, daß die Gerade i während eines Umlaufes viermal über den gegebenen Punkt A in Σ gleitet. Die vier Stiftstellungen des Stabes i', in welchen in diesen vier Bewegungsmomenten die Spitze des Stiftes s_0 sich mit dem Punkt A deckt, seien A_0^1, A_0^2, A_0^3, A_0^4. Ihnen gehören die vier Stiftstellungen A_0^1, A_0^2, A_0^3, A_0^4 auf der Säule ε' zu. Hierauf stellen wir

1.	den Stift s_0 auf	A_0^1,	den Stift σ_0 auf	A_0^1,
2.	„	A_0^2,	„	A_0^2,
3.	„	A_0^3,	„	A_0^3,
4.	„	A_0^4,	„	A_0^4,

und führen die Bewegung des umlaufenden Rades in den vier Fällen jedesmal soweit, daß die Spitze des Stiftes s_0 sich mit dem Punkt A in Σ deckt. Die Spitze des Stiftes σ_0 deckt sich dann in jedem Falle mit einem Punkt in S, welcher dem gegebenen Punkt A entspricht. Die vier entsprechenden Punkte mögen A_1, A_2, A_3, A_4 heißen. Da von den vier Tangenten, die von dem gegebenen Punkt A an die Astroide δ gehen, zwei zusammenfallen oder imaginär werden, je nachdem der Punkt A auf der Astroide δ oder innerhalb derselben liegt, so erhalten wir den Satz:

Einem Punkt A des ebenen Systems Σ sind vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 des ebenen Systems S zugeordnet; zwei dieser Punkte können auch imaginär sein oder in einen Punkt zusammenfallen.

Weitere Ergebnisse über die Abhängigkeit der entsprechenden Punktgruppen von der Lage der gegebenen Punkte werden wir im folgenden aus den Formeln der Verwandtschaft ableiten.

---

[1]) Loria, Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven, 1902, S. 159. Deutsch von Fritz Schlütte.

§ 2.

Analytische Untersuchung der Verwandtschaft.

Das ebene System S möge sich in Fig. 2 in der Anfangslage befinden. Als x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems in dem System S wählen wir die Gerade i und als y-Achse die Gerade, welche im Berührpunkt O des festen Kreises und des rollenden Kreises im Anfang der Bewegung auf i senkrecht steht. In dem System Σ nehmen wir den Durchmesser ε als ξ-Achse und die Senkrechte auf demselben durch den Mittelpunkt Ω des festen Kreises als η-Achse. Hierauf werden auf i bzw. ε zwei sich in der Anfangslage deckende Punkte A_0, A_0 angenommen. In einer durch den Winkel φ bestimmten Lage des bewegten Systems S hat das Achsenkreuz $x\,y$ die Lage $x_\varphi\,y_\varphi$ eingenommen, wobei die neue Lage x_φ eine Tangente an die nicht gezeichnete Astroide δ bildet und die neue Lage O_φ des Koordinatenanfangs O sich auf der ξ-Achse befindet. In dieser neuen Lage bestimmt der Punkt A_0 des festen Systems Σ einen Punkt A in dem bewegten System S, und ferner bestimmt der nach $A_{0,\varphi}$ gelangte Punkt A_0 einen Punkt A in dem System Σ. Dann sind A und A entsprechende Punkte der kinetographischen Verwandtschaft und haben bzw. folgende Koordinaten:

$$\text{A)}\ \begin{cases} x = AA^0 \\ y = AA^{00} \end{cases} \qquad \text{A)}\ \begin{cases} \xi = \mathsf{A}\mathsf{A}^0 \\ \eta = \mathsf{A}\mathsf{A}^{00}. \end{cases}$$

Mit der Annahme der beiden erzeugenden Punkte A_0, A_0 und des Winkels φ sind die beiden entsprechenden Punkte A, A bestimmt. Wir führen deshalb die Strecke $\Omega\mathsf{A}_0 = DA_0$, welche die zwei Punkte A_0, A_0 bestimmt, als einen Parameter m, den erwähnten Winkel als einen Parameter φ ein und können, da $D_\varphi A_{0,\varphi} = m$, $D_\varphi O_\varphi = R$ ist, aus der Fig. 2 die folgenden Formeln der Verwandtschaft ablesen:

$$1)\begin{cases} x=(m-R\cos\varphi)\cos\varphi \\ y=(m-R\cos\varphi)\sin\varphi \end{cases} \quad 2)\begin{cases} \xi = m\cos\varphi \\ \eta = -(m-R)\sin\varphi = (R-m)\sin\varphi. \end{cases}$$

Die Formeln 1) gestalten sich für Polarkoordinaten r und v besonders einfach; sie heißen dann

$$1')\qquad \begin{cases} r = m - R\cos\varphi \\ v = \varphi. \end{cases}$$

Zunächst können wir beweisen, daß durch die Wahl obiger Parameter die Kurvenscharen t, k, τ, $\varkappa$ als Scharen von Parameterkurven auftreten. Es ergibt sich durch die Elimination

von φ aus den Formeln 1) die Gleichung der Schar t,
„ m „ „ „ 1) „ „ „ „ k,
„ φ „ „ „ 2) „ „ „ „ τ,
„ m „ „ „ 2) „ „ „ „ $\varkappa$.

Weiter soll jetzt aus den Formeln bewiesen werden, daß die kinetographische Verwandtschaft zwischen S und Σ zwei—vierdeutig ist.

Es sei in dem System S ein Punkt A durch ein Wertepaar x, y gegeben. Derselbe Punkt kann dann auch durch die zwei Wertepaare von Polarkoordinaten r, v und $-r$, $180^0 + v$ bestimmt werden. Hierzu ergeben sich aus den Formeln 1') die zwei Parameter-Wertepaare

$$\begin{cases} m_1 = r + R\cos v \\ \varphi_1 = v \end{cases} \quad \begin{cases} m_2 = -r + R\cos(180^0 + v) = -(r + R\cos v) = -m_1 \\ \varphi_2 = 180^0 + v. \end{cases}$$

Setzen wir diese beiden Wertepaare in die Formeln 2) ein, so sind damit dem Punkte A des Systems S zwei Punkte A_1, A_2 des Systems Σ zugewiesen, die, wie man ersieht, gleiche ξ-Koordinate besitzen.

Für den Übergang von dem System S zu dem System Σ gelingt es, Formeln auch ohne Zuhilfenahme von Parametern aufzustellen. Es ergibt sich aus den Formeln 1)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \text{ also } \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ und } \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$m = \sqrt{x^2+y^2} + R\cos\varphi = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{Rx}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Führt man diese Werte in die Formeln 2) ein, so erhält man nach kurzer Rechnung die Formeln

$$3) \quad \begin{cases} \xi = \dfrac{x}{x^2+y^2}(x^2+y^2+Rx) \\ \eta = \dfrac{y}{x^2+y^2}[R\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2+Rx)]. \end{cases}$$

Gegeben sei jetzt ein Punkt A in dem System Σ. Quadrieren und addieren wir die Formeln 2), nachdem wir zuvor mit m bzw. $R-m$ geteilt haben, so erhalten wir die Gleichung vierten Grades für m

$$4) \quad \frac{\xi^2}{m^2} + \frac{\eta^2}{(R-m)^2} = 1 \text{ oder}$$

$$m^4 - 2m^3R + m^2(R^2 - \xi^2 - \eta^2) + 2mR\xi^2 - R^2\xi^2 = 0.$$

Die vier Wurzeln in dieser Gleichung sind, entsprechend der Bedeutung, mit welcher der Parameter m in Fig. 2 eingeführt wurde, die Tangentenabschnitte der vier von dem gegebenen Punkt A an die Astroide δ gehenden Tangenten, jeder Abschnitt von A bis zur η-Achse gemessen. Über das Vorzeichen dieser vier Tangentenabschnitte läßt sich bei genauer Verfolgung der Bewegung des rollenden Kreises p_0 folgende Bestimmung angeben:

Der Tangentenabschnitt m ist positiv, wenn die Tangente an den Astroidenzweig desselben Quadranten geht, in dem auch der gegebene Punkt A liegt; er ist auch positiv, wenn die Tangente an den Astroidenzweig des zu diesem Quadranten in Bezug auf die ξ-Achse symmetrischen Quadranten gezogen ist; im andern Falle ist er negativ.

Zu den vier Wurzeln m der Gleichung 4) ergeben sich aus den Formeln 2) vier Wertepaare $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, also vier

Werte φ. Zu jedem Punkt A des Systems Σ gehören daher vier Wertepaare m, φ, welche, in die Formeln 1) eingesetzt, vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 des Systems S bestimmen, die dem Punkte A zugeordnet sind. Wie aus Fig. 2 ersichtlich, werden die vier zu dem Punkt A gehörigen Winkel φ dadurch konstruiert, daß man die vier Mittelpunkte der Tangentenstücke zwischen den beiden Koordinatenachsen mit Ω verbindet und die Winkel zwischen diesen Verbindungslinien und der positiven ξ-Achse mißt.

Die zwei Punkte A_1, A_2, welche einem Punkt A des Systems S entsprechen, können im besonderen auch zusammenfallen. Zu dem Punkt $x = \text{const.} = c$, $y = 0$ ergeben die Formeln 3) den einen Punkt $\xi = c + R$, $\eta = 0$.

Einem Punkt des Systems S, der auf der x-Achse liegt, entspricht doppelt ein Punkt des Systems Σ, der sich auf der ξ-Achse befindet.

Da ferner aus den Formeln 3) folgt

$$\lim_{\substack{x=\infty \\ y=kx}} \xi = \lim_{x=\infty} \left(\frac{x + k^2 x}{1 + k^2} + \frac{R}{1 + k^2} \right) = \left(\frac{x + k^2 x}{1 + k^2} \right)_{x=\infty} = \infty$$

$$\lim_{\substack{x=\infty \\ y=kx}} \eta = \lim_{x=\infty} \left(\frac{kR}{\sqrt{1 + k^2}} - \frac{kR}{1 + k^2} - k \frac{x + k^2 x}{1 + k^2} \right)$$

$$= -k \left(\frac{x + k^2 x}{1 + k^2} \right)_{x=\infty} = -k\infty,$$

so erhalten wir den Satz:

Dem unendlich fernen Punkt der Geraden $y = kx$ in dem System S ist der unendlich ferne Punkt der Geraden $\eta = -k\xi$ in dem System Σ doppelt zugeordnet.

Erwähnenswert ist auch, daß einem Punkt $x = 0$, $y = c$ auf der y-Achse nach den Formeln 3) die beiden Punkte $\xi = 0$, $\eta = R - c$ und $\xi = 0$, $\eta = -R - c$ auf der η-Achse entsprechen.

Was die vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 betrifft, die einem Punkt A des Systems Σ zugeordnet sind, so wurde bereits im vorigen Paragraphen erwähnt, daß zwei derselben zusammenfallen, wenn A auf der Astroide δ in Σ liegt. Mittels der Formeln können wir nun weiter beweisen, daß auch allen Punkten der ξ-Achse nur drei Punkte entsprechen. Die Gleichung 4) hat für $\eta = 0$, $\xi = \text{const.} = c$ außer den beiden Wurzeln $m = \pm c$ noch die Doppelwurzel $m = R$. Hierzu ergeben sich aus den Formeln 2) vier Winkel φ, sodaß dem gegebenen Punkt folgende vier Wertepaare m, φ zugeordnet sind

$$m = c,\ \varphi = 0;\ m = -c,\ \varphi = 180^0;\ m = R,\ \varphi = \arccos\frac{c}{R};$$

$$m = R,\ \varphi = 360^0 - \arccos\frac{c}{R}.$$

Setzen wir diese Wertepaare in die Formeln 1) ein, so werden dadurch zu dem gegebenen Punkt der ξ-Achse nur drei Punkte bestimmt, weil die beiden ersten Wertepaare denselben Punkt $x = c - R$, $y = 0$ liefern. Diese drei Punkte haben die Koordinaten

$$x = c - R,\ y = 0;\ x = (R - c)\frac{c}{R},\ y = \frac{R - c}{R}\sqrt{R^2 - c^2};$$

$$x = (R - c)\frac{c}{R},\ y = -\frac{R - c}{R}\sqrt{R^2 - c^2}.$$

Demnach erhalten wir den folgenden Satz:

Einem Punkt des ebenen Systems Σ, der auf der ξ-Achse liegt, entsprechen drei Punkte des Systems S, deren einer sich auf der x-Achse befindet, während die beiden anderen symmetrisch zu dieser Achse liegen.

Auf dieselbe Weise wie dieser Satz ergibt sich auch der folgende:

Liegt der Punkt A des Systems Σ auf der η-Achse und hat er die Koordinaten $\xi = 0$, $\eta = c$, so liegen von den entsprechenden vier Punkten zwei auf der y-Achse und haben die Koordinaten $x = 0$, $y = -(c + R)$ und

$x = 0$, $y = R - c$, während die beiden anderen Punkte symmetrisch zur x-Achse liegen.

Wie Punkten der ξ-Achse und Punkten der Astroide δ, so entsprechen auch den unendlich fernen Punkten im System Σ nur drei Punkte des Systems S, weil die beiden reellen zugeordneten Punkte in einem unendlich fernen Punkt zusammenfallen. Als gegebenen unendlich fernen Punkt in Σ nehmen wir den unendlich fernen Punkt der Geraden $\eta = k\xi$ an, der also die Koordinaten $\xi = \infty$, $\eta = k\xi$ besitzt. Die zwei reellen Winkel φ, welche zu diesem Punkt gehören und die nach der Bemerkung auf S. 16 konstruiert werden können, sind, wie man aus der zum Koordinatenanfang zentrisch-symmetrischen Lage der beiden in Betracht kommenden reellen Tangenten ersieht, um 180^0 voneinander verschieden und bestimmen den einen Fahrstrahl $\frac{\eta}{\xi} = -k$. Die zwei reellen Werte m, welche zu dem gegebenen unendlich fernen Punkt gehören, sind beide unendlich groß und haben entgegengesetztes Vorzeichen. Konstruieren wir nun zu den beiden Wertepaaren m, φ etwa nach den Formeln 1′) die beiden durch sie bestimmten Punkte in S, so ergibt sich, daß dieselben mit dem einen unendlich fernen Punkt der Geraden $\frac{y}{x} = -k$ zusammenfallen.

Dem unendlich fernen Punkt der Geraden $\eta = k\xi$ in dem System Σ entspricht in dem System S neben zwei imaginären Punkten noch der unendlich ferne Punkt der Geraden $y = -kx$ doppelt.

Es sollen nun noch einige spezielle Punkte des Systems Σ hervorgehoben werden, deren entsprechenden Punkte alle oder zum Teil zusammenfallen. Der Beweis wird wie oben geführt, indem immer aus den Formeln die zugehörigen Wertepaare m, φ bestimmt werden. Es entsprechen bzw. den Punkten

$$\xi = 0,\ \eta = 0:\ \xi = R,\ \eta = 0;\ \xi = -R,\ \eta = 0;\ \xi = 0,\ \eta = R;$$
$$\xi = 0,\ \eta = -R$$

die Punktgruppen

$$\begin{cases} x=-R, y=0 \\ x=0, y=R \\ x=0, y=-R; \end{cases} \quad x=0, y=0; x=-2R, y=0; \quad \begin{cases} x=0, y=0 \\ x=0, y=-2R; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0, y=0 \\ x=0, y=2R. \end{cases}$$

§ 3.

Geometrische Konstruktion der entsprechenden Punktgruppen.

Die x-Achse des ebenen Systems S möge sich mit der ξ-Achse des Systems Σ, die y-Achse in S sich mit der η-Achse in Σ decken. Die Punkte des Systems S werden, wie bisher, mit großen lateinischen, die entsprechenden des Systems Σ mit entsprechenden großen griechischen Buchstaben bezeichnet, die Hilfspunkte und Hilfslinien mit deutschen Buchstaben.

Es sei nun ein Punkt A des ebenen Systems S gegeben; es sollen die beiden entsprechenden Punkte A_1, A_2 in dem Systeme Σ konstruiert werden.

Der Radius vector des Punktes A sei r, sein Polarwinkel v. Dann gehören zu dem Punkte A die beiden Wertepaare m, φ

$$\begin{cases} m_1 = r + R\cos v \\ \varphi_1 = v, \end{cases} \quad \begin{cases} m_2 = -m_1 \\ \varphi_2 = 180^0 + v. \end{cases}$$

Diese Werte setzen wir in die Formeln 2) ein und erhalten für die Punkte A_1, A_2 folgende Koordinaten

$$\mathsf{A}_1) \begin{cases} \xi_1 = m_1 \cos v \\ \eta_1 = R\sin v - m_1 \sin v = (R - m_1)\sin v \end{cases}$$

$$\mathsf{A}_2) \begin{cases} \xi_2 = \xi_1 \\ \eta_2 = -R\sin v - m_1 \sin v = -(R + m_1)\sin v. \end{cases}$$

Dem Punkte A mit den Polarkoordinaten r, v entsprechen die zwei Punkte A_1, A_2 mit den soeben berechneten rechtwink-

ligen Koordinaten, wobei $m_1 = r + R\cos v$ ist. Hiernach ergibt sich die folgende Konstruktion für die beiden Punkte A_1 und A_2.

Wir verlängern in Fig. 3 den Radius vector des Punktes A in positiver Richtung, d. h. von $\mathfrak{O}$ über A hinaus, bis zum Schnittpunkt $\mathfrak{U}$ mit dem Kreis, welcher mit dem Radius R um den gemeinschaftlichen Koordinatenanfang $\mathfrak{O}$ beider Systeme als Mittelpunkt beschrieben ist. Von $\mathfrak{U}$ fällen wir die Senkrechte auf die $x\xi$-Achse; der Fußpunkt sei $\mathfrak{U}_0$, während der andere Schnittpunkt dieser Senkrechten mit dem erwähnten Kreis $\mathfrak{U}'$ heißen möge. Hierauf tragen wir die Strecke $\mathfrak{O}\,\mathfrak{U}_0$ nach $A\,\mathfrak{N}$. Das Abtragen dieser Strecke $\mathfrak{O}\,\mathfrak{U}_0$ findet in der positiven Richtung des Fahrstrahles, d. h. in der Richtung von $\mathfrak{O}$ nach A statt, wenn $\mathfrak{O}\,\mathfrak{U}_0$ auf der positiven $x\,\xi$-Achse liegt; wenn aber diese Strecke sich auf der negativen $x\xi$-Achse befindet, so muß $\mathfrak{O}\,\mathfrak{U}_0$ von A aus in der Richtung A nach $\mathfrak{O}$ abgetragen werden. Auf der Parallelen $\mathfrak{N}\,\mathfrak{N}_0$ durch $\mathfrak{N}$ zur $y\,\eta$-Achse liegen dann die beiden gesuchten Punkte A_1, A_2; denn es ist

$$\mathfrak{O}\,\mathfrak{N} = r + \mathfrak{O}\,\mathfrak{U}_0 = r + R\cos v = m_1$$
$$\mathfrak{O}\,\mathfrak{N}_0 = m_1\cos v = \xi_1 = \xi_2.$$

Wird nun um den Punkt $\mathfrak{O}$ mit dem Radius $\frac{1}{2}R$ ein Kreis beschrieben, der den Fahrstrahl in den Punkten $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ schneidet, so sind die Gerade $\mathfrak{M}\,\mathfrak{U}_0$ und die zu ihr parallele Gerade $\mathfrak{M}'\,\mathfrak{V}$ Tangenten an die Astroide δ und bestimmen auf der Geraden $\mathfrak{N}\,\mathfrak{N}_0$ die beiden Punkte A_1, A_2, welche dem gegebenen Punkt A entsprechen, wie der folgende Beweis ergibt:

Es ist $\sphericalangle\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{U}_0\,\mathfrak{O} = \sphericalangle\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{O}\,\mathfrak{U}_0 = v$.

Ziehen wir zur $x\,\xi$-Achse die Parallele $\mathfrak{N}\,\mathfrak{Q}$, dann sind die rechtwinkligen Dreiecke $\mathfrak{U}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{Q}$ und $\mathsf{A}_1\,\mathfrak{U}_0\,\mathfrak{N}_0$ kongruent, weil $\mathfrak{N}\,\mathfrak{Q} = \mathfrak{U}_0\,\mathfrak{N}_0$ und $\sphericalangle\,\mathfrak{U}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{Q} = \sphericalangle\,\mathsf{A}_1\,\mathfrak{U}_0\,\mathfrak{N}_0 = v$ ist.

Folglich ist

$$\mathfrak{N}_0\,\mathsf{A}_1 = \mathfrak{Q}\,\mathfrak{U} = \mathfrak{N}\,\mathfrak{U}\sin v = (R - m_1)\sin v = \eta_1.$$

Wir ziehen ferner durch den Schnittpunkt $\mathfrak{V}$ der Tangente an die Astroide δ und der $y\,\eta$-Achse die Senkrechte $\mathfrak{V}\,\mathfrak{W}$ auf

die Gerade $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_0$. Dann sind die rechtwinkligen Dreiecke $\mathfrak{B}\mathfrak{W}\mathsf{A}_2$ und $\mathfrak{O}\mathfrak{N}_0\mathfrak{N}$ kongruent, weil $\mathfrak{B}\mathfrak{W} = \mathfrak{O}\mathfrak{N}_0$, $\sphericalangle\, \mathfrak{W}\mathfrak{B}\,\mathsf{A}_2 = \sphericalangle\, \mathfrak{N}_0\mathfrak{O}\mathfrak{N} = v$ ist. Demnach ist

$$\mathfrak{W}\,\mathsf{A}_2 = -\,\mathfrak{N}_0\,\mathfrak{N} = -\,m_1 \sin v,$$

ferner

$$\mathfrak{N}_0\,\mathfrak{W} = \mathfrak{O}\,\mathfrak{B} = -\,R \sin v$$

und es ergibt sich

$$\mathfrak{N}_0\,\mathsf{A}_2 = -\,(m_1 + R) \sin v = \eta_2.$$

Als Kontrolle dient, daß die Strecke

$$\mathsf{A}_1\,\mathsf{A}_2 = \eta_1 - \eta_2 = 2\,R \sin v = \mathfrak{U}\,\mathfrak{U}'$$

sein muß.

Es sei nun ein Punkt A des Systems Σ gegeben; es sollen die vier ihm entsprechenden Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 in dem Systeme S konstruiert werden.

Diese Konstruktion können wir am einfachsten in der Weise ausführen, daß wir von einem Punkt des Systems Σ aus die vier möglichen Tangenten graphisch an die gezeichnete Astroide δ legen; die Genauigkeit dieser Konstruktion wird noch dadurch kontrolliert, daß das Tangentenstück zwischen den beiden Koordinatenachsen gleich R sein muß. Wir ziehen hiernach in Fig. 4 von dem Punkte A aus die vier Tangenten an die Astroide δ. Die vier Schnittpunkte dieser Tangenten mit der $y\eta$-Achse sind $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$. Dann ist $\mathsf{A}\,\mathfrak{P}_1 = m_1$; $\mathsf{A}\,\mathfrak{P}_2 = m_2$; $\mathsf{A}\,\mathfrak{P}_3 = m_3$; $\mathsf{A}\,\mathfrak{P}_4 = m_4$, wobei m_1, m_2, m_3, m_4 die vier zu dem Punkte A gehörigen Parameterwerte m bedeuten. Hierauf halbieren wir die Stücke der vier Tangenten zwischen den Koordinatenachsen durch die Punkte $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_4$, wobei zu beachten ist, daß diese vier Punkte auf dem um $\mathfrak{O}$ mit dem Radius $\frac{1}{2}\,R$ beschriebenen Kreis liegen müssen. Nach den Formeln 1′) befinden sich dann die gesuchten Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 bzw. auf den Fahrstrahlen $\mathfrak{O}\,\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{O}\,\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{O}\,\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{O}\,\mathfrak{M}_4$,[1]) welche

[1]) Die vier Punkte $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_4$ können auch als die Schnittpunkte einer gleichseitigen Hyperbel mit dem um $\mathfrak{O}$ mit dem Radius $\frac{1}{2}\,R$ beschriebenen Kreis bestimmt werden.

jeweils mit der positiven $x\,\xi$-Achse die zu den vier Werten m gehörigen vier Winkel φ bestimmen. Die Entfernungen der vier gesuchten Punkte von $\mathfrak{O}$ konstruieren wir nach der Formel $r = m - R\cos\varphi$; wir machen also

$$\mathfrak{O}A_1 = \mathsf{A}\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{O}\mathfrak{Q}_1;\quad \mathfrak{O}A_2 = \mathsf{A}\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{O}\mathfrak{Q}_2;$$
$$\mathfrak{O}A_3 = \mathsf{A}\mathfrak{P}_3 - \mathfrak{O}\mathfrak{Q}_3;\quad \mathfrak{O}A_4 = \mathsf{A}\mathfrak{P}_4 - \mathfrak{O}\mathfrak{Q}_4.$$

Dabei müssen alle diese Strecken mit richtigen Vorzeichen eingeführt werden. Nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Regel sind in diesem Falle die Strecken $\mathsf{A}\mathfrak{P}_1$, $\mathsf{A}\mathfrak{P}_2$, $\mathsf{A}\mathfrak{P}_4$ positiv, die Strecke $\mathsf{A}\mathfrak{P}_3$ ist negativ; ferner sind die Strecken $\mathfrak{O}\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{O}\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{O}\mathfrak{Q}_4$, als auf der positiven $x\,\xi$-Achse liegend, positiv, die Strecke $\mathfrak{O}\mathfrak{Q}_3$ auf der negativen $x\,\xi$-Achse ist negativ. Das Resultat der Subtraktion $r = m - R\cos\varphi$ wird auch positiv oder negativ sein und ist dementsprechend von $\mathfrak{O}$ aus auf dem positiven oder negativen Fahrstrahl aufzutragen. Wollen wir z. B. den Punkt A_2 konstruieren, so sind die Strecken $\mathsf{A}\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{O}\mathfrak{Q}_2$ beide positiv; wir machen also $\mathsf{A}\mathfrak{U} = \mathfrak{O}\mathfrak{Q}_2$ und tragen $\mathfrak{U}\mathfrak{P}_2$, welches ebenfalls positiv ist, da $\mathsf{A}\mathfrak{P}_2 > \mathfrak{O}\mathfrak{Q}_2$, in der Richtung $\mathfrak{O}\mathfrak{M}_2$ von $\mathfrak{O}$ aus ab, wodurch wir den Punkt A_2 erhalten.

§ 4.

Die Fundamentalkurve des ebenen Systems Σ.

Die Formeln 3) werden unbestimmt, wenn wir für x und y die Koordinaten des Punktes O, des Koordinatenanfanges in dem ebenen System S, einführen, sodaß diesem Punkt kein bestimmtes Punktepaar des Systems Σ zugeordnet ist. Die Formeln 1) lassen erkennen, daß diesem Punkte $x = 0$, $y = 0$ nicht zwei, sondern unendlich viele Parameter-Wertepaare m, φ zugehören, die alle der Bedingung $m - R\cos\varphi = 0$ genügen. Daher entspricht dem Koordinatenanfang O im System S eine Art Fundamentalkurve ω des ebenen Systems Σ, deren Gleichung in den krummlinigen Koordinaten m, φ

5) $$m - R\cos\varphi = 0$$

ist.

Wollen wir die Gleichung von ω in rechtwinkligen Koordinaten erhalten, so müssen wir aus der Gleichung 5) und den Formeln 2) m und φ eliminieren.

Eliminieren wir zunächst nur m, so erhalten wir die Gleichung der Kurve ω in der Parameterdarstellung

6) $$\begin{cases} \xi = R\cos^2\varphi \\ \eta = R\sin\varphi - R\cos\varphi\sin\varphi. \end{cases}$$

Eliminieren wir nur φ, so entsteht die Parameterdarstellung

7) $$\begin{cases} \xi = \dfrac{m^2}{R} \\ \eta = (R-m)\dfrac{1}{R}\sqrt{R^2 - m^2}. \end{cases}$$

Eliminieren wir schließlich aus den Gleichungen 6) den Parameter φ oder aus den Gleichungen 7) den Parameter m, dann bekommen wir als Gleichung der Kurve ω in den rechtwinkligen Koordinaten ξ, η

8) $$\eta = \sqrt{R-\xi}\,(\sqrt{R} - \sqrt{\xi}).$$

Durch Quadrieren erhält man

8a) $$(\eta^2 + \xi^2)^2 - 4R\xi^3 + 2R^2(3\xi^2 - \eta^2) - 4R^3\xi + R^4 = 0.$$

Die Fundamentalkurve ω ist also eine Kurve vierter Ordnung. Wendet man auf ihre Gleichung die Transformation an

$$\xi = \xi' + R$$
$$\eta = \eta',$$

so erhält man die Gleichung

9) $$(\eta'^2 + \xi'^2)^2 + 4R\xi'\eta'^2 = 0.$$

Die Fundamentalkurve ω ist demnach ein gerades Zweiblatt.[1]) Dasselbe hat in dem Koordinatensystem $\xi\eta$ seinen dreifachen Punkt im Punkte $\xi = R$, $\eta = 0$, ist symmetrisch zur ξ-Achse und berührt die η-Achse in den Punkten $\xi = 0$, $\eta = R$ und $\xi = 0$, $\eta = -R$.

Vertauschen wir an dem zitierten Ort die x-Achse mit der η'-Achse, die y-Achse mit der ξ'-Achse, dann geht die dort für das Zweiblatt aufgestellte Gleichung (9′) in die oben erhaltene Gleichung 9) über, wenn wir die Konstante $b = -4R$ setzen. Die allgemeinere Konstruktion, welche dort für das schiefe Zweiblatt angegeben ist, wird im Spezialfall des geraden Zweiblattes mit der Konstanten $b = -4R$ die folgende:

Wir machen in Fig. 5 die Strecke $\mathfrak{D}\mathfrak{B} = 4R$, ziehen durch $\mathfrak{B}$ eine beliebige Gerade und fällen von $\mathfrak{D}$ auf sie die Senkrechte, deren Fußpunkt $\mathfrak{E}$ ist. Hierauf ziehen wir durch $\mathfrak{E}$ die Parallele zu $\mathfrak{D}\mathfrak{B}$ bis zum Schnittpunkt $\mathfrak{H}$ mit der in $\mathfrak{D}$ auf $\mathfrak{D}\mathfrak{B}$ errichteten Senkrechten $\mathfrak{D}\mathfrak{G}$, und ferner auf $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ die Senkrechte $\mathfrak{H}\mathfrak{P}$; dann ist der Fußpunkt $\mathfrak{P}$ derselben ein Punkt des Zweiblattes ω.

Eine sehr einfache Konstruktion des Zweiblattes ω wird erhalten, wenn wir den Koordinatenanfang O als einen Kreis von unendlich kleinem Radius betrachten und zu sämtlichen Punkten desselben die entsprechenden Punktepaare nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Konstruktion zeichnen.

Wir ziehen also in Fig. 6 durch O eine beliebige Gerade, welche den um O mit dem Radius R beschriebenen Kreis in dem Punkt $\mathfrak{U}$ schneidet, fällen vom Punkte $\mathfrak{U}$ die Senkrechte $\mathfrak{U}\mathfrak{U}_0$ auf die $x\xi$-Achse und machen $O\mathfrak{N} = O\mathfrak{U}_0$. Hierauf verbinden wir $\mathfrak{U}_0$ mit dem Schnittpunkt $\mathfrak{M}$ des beliebigen Fahrstrahles und des um O mit dem Radius $\frac{1}{2}R$ beschriebenen Kreises und ziehen durch $\mathfrak{M}'$, dem anderen Schnittpunkt des Fahrstrahles mit diesem Kreis die Parallele dazu. Beide Parallelen schneiden die Senkrechte durch $\mathfrak{N}$ auf die $x\xi$-Achse in den zwei Punkten Ω_1, Ω_2 des Zweiblattes ω.

[1]) Loria, a. a. O., S. 159.

Da $m = O\mathfrak{N} = R\cos v$ die Polargleichung in m und v eines Kreises über $O\mathfrak{D}$ als Durchmesser ist, so besteht die Kontrolle, daß die sämtlichen Punkte $\mathfrak{N}$ auf diesem Kreise liegen müssen.

Eine dritte Konstruktion der Fundamentalkurve ω kann aus der Parameterdarstellung 6) hergeleitet werden. — Wir betrachten zunächst die gemeine Kardioide mit der reellen Spitze im Koordinatenanfang, welche symmetrisch zur ξ-Achse ist und dieselbe noch im Punkte $\bar{\xi} = -2R$ schneidet. Eine Parameterdarstellung dieser Kurve ist

$$10) \quad \begin{cases} \bar{\xi} = R(1 - \cos\varphi)\cos\varphi = R\cos\varphi - R\cos^2\varphi \\ \bar{\eta} = R(1 - \cos\varphi)\sin\varphi = R\sin\varphi - R\cos\varphi\sin\varphi. \end{cases}$$

Hierin hat der Parameter φ die Bedeutung des Polarwinkels und die Konstruktion ist die folgende: Man zieht in Fig. 7 einen beliebigen Fahrstrahl bis zum Schnittpunkt $\mathfrak{U}$ des um $\mathfrak{O}$ mit dem Radius R beschriebenen Kreises und fällt von $\mathfrak{U}$ die Senkrechte $\mathfrak{U}\mathfrak{U}_0$ auf die $\bar{\xi}$-Achse. Hierauf trägt man vom Punkte $\mathfrak{U}$ aus in positiver oder negativer Fahrstrahlrichtung das Stück $\mathfrak{O}\mathfrak{U}_0$ ab, je nachdem dasselbe auf der negativen oder positiven ξ-Achse liegt. Der Punkt A ist dann ein Punkt der Kardioide.

Auf diese Kardioide wenden wir nun die folgende Transformation an

$$11) \quad \begin{cases} \bar{\xi} = R\cos\varphi - \xi \\ \bar{\eta} = \eta \end{cases} \text{ oder } \begin{cases} \xi = R\cos\varphi - \bar{\xi} \\ \eta = \bar{\eta} \end{cases}$$

und erhalten dadurch das Zweiblatt ω in der Parameterdarstellung 6), für welches also der Parameter φ nicht den Polarwinkel eines seiner Punkte selbst, sondern den des entsprechenden Punktes der Kardioide bedeutet. Die Konstruktion des Zweiblattes ist hiernach die folgende:

Wir bestimmen einen Punkt $\bar{\mathsf{A}}$ der Kardioide und ziehen durch denselben die Parallele zu der $\xi\bar{\xi}$-Achse; hierauf fällen wir von dem Punkte $\bar{\mathsf{A}}$ die Senkrechte $\mathsf{A}\mathfrak{A}$

auf die $\xi\xi$-Achse und tragen von $\mathfrak{U}_0$ aus in der Richtung $\bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{O}$ das Stück $\bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{O}$ ab, wodurch wir den Punkt $\mathfrak{A}$ erhalten. Die Senkrechte im Punkte $\mathfrak{A}$ auf die $\xi\xi$-Achse schneidet die durch den Punkt $\bar{\mathsf{A}}$ zu dieser Achse parallel gezogene Gerade in einem Punkt A des Zweiblattes ω.

Schließlich wollen wir noch in der Darstellung 6) des Zweiblattes überall anstatt $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ die Funktion $\operatorname{tg}\varphi$ einführen, um die Parameterdarstellung

$$12) \qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{R}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} \\ \eta = R\operatorname{tg}\varphi\,\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}-1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} \end{cases}$$

zu erhalten, auf die wir im nächsten Paragraphen nochmals zurückkommen werden.

§ 5.

Die Kurve des ebenen Systems S, welche einer Geraden des Systems Σ entspricht.

Die Gleichung der Kurve c in S, welche einer Geraden γ in Σ entspricht, wird erhalten, wenn man in die Gleichung der Geraden γ anstatt ξ und η nach den Formeln 3) die Ausdrücke in x und y einführt. Ist

$$a\xi + b\eta = ab$$

die Gleichung der Geraden γ mit den Achsenabschnitten b, a, so wird die Gleichung der Kurve c

$$13) \qquad (x^2+y^2)(by-ax+ab)+Rx(by-ax) = bRy\sqrt{x^2+y^2}.$$

Wir quadrieren und erhalten

$$
\begin{aligned}
13^a) \quad & y^6[b^2] + y^5 x[-2ab] + y^4 x^2[a^2 + 2b^2] + y^3 x^3[-4ab] \\
& + y^2 x^4[b^2 + 2a^2] + y x^5[-2ab] + x^6[a^2] + y^5[2ab^2] \\
& + y^4 x[2b(Rb - a^2)] + y^3 x^2[4ab(b - R)] + y^2 x^3[2(Rb^2 \\
& + a^2(R - 2b))] + y x^4[2ab(b - 2R)] + x^5[2a^2(R - b)] \\
& + y^4[b^2(a^2 - R^2)] + y^3 x[2ab^2 R] + y^2 x^2[2a^2 b(b - R)] \\
& + y x^3[2ab R(b - R)] + x^4[a^2(b - R)^2] = 0.
\end{aligned}
$$

Da γ die Fundamentalkurve ω in vier Punkten schneidet, so muß die Kurve c den Punkt $x = 0$, $y = 0$ als vierfachen Punkt besitzen, wie auch Gleichung 13ª) erweist. Die Gleichung für die trigonometrischen Tangenten jener vier Winkel φ, welche die Tangenten des vierfachen Punktes mit der x-Achse bilden, erhält man durch Nullsetzung der Glieder niedrigster Ordnung der Gleichung 13ª) als Gleichung

$$
\begin{aligned}
13') \quad & \operatorname{tg}^4\varphi[b^2(a^2 - R^2)] + \operatorname{tg}^3\varphi[2ab^2 R] + \operatorname{tg}^2\varphi[2a^2 b(b - R)] \\
& + \operatorname{tg}\varphi[2ab R(b - R)] + [a^2(b - R)^2] = 0.
\end{aligned}
$$

Diese vier Winkel φ hängen in einfacher Weise mit den vier Schnittpunkten der Geraden γ mit der Fundamentalkurve ω zusammen. Schneidet man nämlich die Gerade γ mit dem Zweiblatt ω in der Parameterdarstellung 12), so entsteht als Gleichung für die vier Parameterwerte φ ebenfalls die Gleichung 13'), woraus wir erkennen:

Die Winkel der Tangenten des vierfachen Punktes der Kurve c mit der x-Achse sind gleich den vier Polarwinkeln jener Punkte der Kardioide der Gleichung 10), welche den vier Schnittpunkten der Geraden γ mit der Fundamentalkurve ω vermöge der Transformation 11) entsprechen.

Wir bestimmen also in Fig. 7 graphisch zu den vier Schnittpunkten $\mathsf{B}, \mathsf{\Gamma}, \Delta, \mathsf{E}$ von γ mit ω die entspechenden Punkte der Kardioide $\bar{\mathsf{B}}, \bar{\mathsf{\Gamma}}, \bar{\Delta}, \bar{\mathsf{E}}$; dann schließen die Strahlen $\mathfrak{O}\bar{\mathsf{B}}, \mathfrak{O}\bar{\mathsf{\Gamma}}, \mathfrak{O}\bar{\Delta}, \mathfrak{O}\bar{\mathsf{E}}$ mit der $\xi\xi$-Achse die gesuchten Winkel der Tangenten des vierfachen Punktes mit der x-Achse ein.

Die Kurve c hat ferner den Punkt $x = b - R$, $y = 0$ zum Doppelpunkt. Transformiert man nämlich c auf ein neues Achsensystem mittels der Formeln

$$x = x' + (b - R), \quad y = y',$$

so werden die Glieder niedrigster Ordnung solche von der zweiten und ihre Nullsetzung gibt die Gleichung für die Doppelpunktstangenten

$$\left(\frac{y'}{x'}\right)^2 + \frac{y'}{x'} \cdot \frac{-2a}{b+R} + \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b-R}{b+R} = 0.$$

Die Gleichung für die Richtungen nach den unendlich fernen Punkten von c wird erhalten, wenn wir die Glieder sechster Ordnung der Gleichung 13[a]) gleich Null setzen.

$$w^6[b^2] + w^5[-2ab] + w^4[a^2 + 2b^2] + w^3[-4ab] + w^2[b^2 + 2a^2] + w[-2ab] + a^2 = 0.$$

Darin bedeuten die sechs Werte w die trigonometrischen Tangenten der Winkel jener Fahrstrahlen mit der x-Achse, welche nach den unendlich fernen Punkten von c gehen.

Die erhaltene Gleichung besitzt die drei Doppelwurzeln

$$w_1 = \frac{a}{b}, \quad w_2 = +i, \quad w_3 = -i.$$

Einer Geraden γ des ebenen Systems Σ entspricht also eine Kurve c von der sechsten Ordnung in dem System S, welche im Koordinatenanfang einen vierfachen und im Punkt $x = b - R$, $y = 0$ einen zweifachen Punkt besitzt; dieselbe geht ferner durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte und hat außerdem den unendlich fernen Punkt der Geraden $y = \frac{a}{b} x$ zum Doppelpunkt.

Die Konstruktion der Kurve c könnte zunächst nach § 3 erfolgen, indem man zu den einzelnen Punkten der Geraden γ

die entsprechenden Punktvierecke konstruierte. Es gelingt aber auch, eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal anzugeben, welche im folgenden abgeleitet werden soll.

Wir führen in die Gleichung 13) mittels der Formeln

$$x = r\cos v,\ y = r\sin v$$

Polarkoordinaten ein und erhalten nach Division mit r^2 die Gleichung

14) $br\sin v - ar\cos v + ab + R\cos v(b\sin v - a\cos v) - bR\sin v = 0.$

Dieselbe kann auf die Form gebracht werden

14a) $$r = \left(\frac{\frac{-Rb}{a}\cdot R}{\frac{-Rb}{a}\sin v + R\cos v}\cdot\sin v\right) + \left(\frac{b\cdot(-a)}{b\sin v + (-a)\cos v} - R\cos v\right).$$

Die Kurve c kann nun aus zwei Kurven g und t zusammengesetzt werden, deren Polargleichungen bzw. sind

15) $$r' = \frac{\frac{-Rb}{a}\cdot R}{\frac{-Rb}{a}\sin v + R\cos v}\cdot\sin v,$$

16) $$r'' = \frac{b\cdot(-a)}{b\sin v + (-a)\cos v} - R\cos v.$$

Es wird sich zeigen, daß man für diese beiden Kurven je eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal angeben kann, die zu jedem Polarwinkel einen Radius vector, also einen Kurvenpunkt liefert. Addieren wir dann zwei zu ein und demselben Polarwinkel gehörige Radien vectoren unter Beachtung der Vorzeichen, so entsteht die Kurve c, denn es ist

$$r = r' + r'',$$

und demnach ist auch die Kurve c mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Wir müssen also zunächst die beiden Kurven g und t näher betrachten.

Die Kurve g hat in rechtwinkligen Koordinaten die Gleichung

$$15^a) \qquad (x^2+y^2)\left(x-\frac{b}{a}y\right)^2=\frac{R^2\cdot b^2}{a^2}y^2,$$

ist also von der vierten Ordnung, zentrisch-symmetrisch zum Koordinatenanfang, geht durch die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte und hat den unendlich fernen Punkt der Geraden $y=\frac{a}{b}x$ zum Doppelpunkt.

Da

$$\bar{r}=\frac{\frac{-Rb}{a}\cdot R}{\frac{-Rb}{a}\sin v+R\cos v}$$

die Polargleichung der Geraden $ax-by+Rb=0$ mit den Achsenabschnitten $\frac{-Rb}{a}$, R ist, so erkennt man, daß die Kurve g eine Verallgemeinerung der Gutschoven'schen Kappa-Kurve ist, wenn man als deren Erzeugung die von Barrow zu Grunde legt.[1]) An Stelle der speziellen festen Geraden $x=a$ tritt die allgemeine feste Gerade $ax-by+Rb=0$, welche g' heißen möge.

Die Gerade γ besitzt in Fig. 8 die Achsenabschnitte $O\mathfrak{B}=b$, $O\mathfrak{A}=a$ und den Richtungskoeffizienten $-\frac{a}{b}$. Machen wir $O\mathfrak{A}'=O\mathfrak{A}$, so hat die Gerade $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}=t'$ die Achsenabschnitte $b, -a$ und den Richtungskoeffizienten $\frac{a}{b}$. Ziehen wir nun durch $\mathfrak{D}$ die Parallele zu t', so erhält diese Gerade die Achsenabschnitte $\frac{-R\cdot b}{a}$, R, ist also die Gerade g'.

---

[1]) Loria, a. a. O., S. 182 und 184.

Um nun den Punkt P der Kurve g zu finden, welcher zu dem beliebig gewählten Polarwinkel v gehört, schneiden wir den betreffenden Fahrstrahl mit der Geraden g' im Punkte P', fällen von P' die Senkrechte $P'Q$ auf die x-Achse und tragen das Stück $P'Q$ von O aus auf dem Fahrstrahl ab, wodurch der Punkt P erhalten wird. Das Abtragen der Strecke $P'Q$ erfolgt, wie man aus der Gleichung 15) ersieht, im positiven Sinn des zu v gehörigen Fahrstrahles, wenn sin v und OP', der zu v gehörige Radius vector der Geraden g', dasselbe Vorzeichen haben; besitzen sie entgegengesetztes Vorzeichen, dann muß $P'Q$ auf dem negativen Fahrstrahl abgetragen werden.

Die Gleichung der Kurve t ist in rechtwinkligen Koordinaten

$$16^a) \quad (x^2+y^2)(by-ax)+x^2(ab-aR)+aby^2+bRxy=0.$$

Diese Kurve, die also von der dritten Ordnung ist, geht durch die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte, durch den unendlich fernen Punkt der Geraden $y=\frac{a}{b}x$ und hat in dem Koordinatenanfang einen Doppelpunkt. Wir können beweisen, daß die Kurve t eine Verallgemeinerung der Cramer'schen Kurve ist.[1]) Um dies einzusehen, müssen wir zuvor eine andere Konstruktion als Cramer angeben, der die Kurve auf folgende Weise zeichnet:

In Fig. 9 ist die Strecke $\mathfrak{AB}$ gleich dem Radius R, die Strecke $\mathfrak{OB}$ gleich dem Achsenabschnitt b gemacht und über $\mathfrak{AB}$ als Durchmesser ein Kreis beschrieben. Eine beliebige Gerade durch den Punkt $\mathfrak{B}$ schneidet den Kreis in dem Punkte $\mathfrak{N}$, von welchem die Senkrechte auf $\mathfrak{AB}$ gefällt wird. Diese Senkrechte schneidet die durch den Punkt $\mathfrak{O}$ zu der Geraden $\mathfrak{BN}$ gezogene Parallele in dem Punkte $\mathfrak{P}$ der Cramerschen Kurve.

[1]) Cramer, Introduction a l'analyse des lignes courbes algébriques, 1750, S. 441.

Es ist die Gleichung dieser Kurve

$$\xi(\xi^2 + \eta^2) = b\eta^2 + (b - R)\xi^2.$$

Für diese Kurve geben wir nun die folgende Konstruktion:

In Fig. 10 ist um den Koordinatenanfang $\mathfrak{O}$ als Mittelpunkt ein Kreis mit dem Radius R beschrieben und ferner ist die feste Gerade $\xi = b = \mathfrak{O}\mathfrak{E}$ gegeben. Ein beliebiger Strahl durch $\mathfrak{O}$ schneidet den Kreis in $\mathfrak{G}$, die feste Gerade in $\mathfrak{P}'$. Fällt man nun vom Punkte $\mathfrak{G}$ aus die Senkrechte $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_0$ auf die ξ-Achse und trägt das Stück $\mathfrak{O}\mathfrak{G}_0$, je nachdem es positiv oder negativ ist, im negativen oder positiven Sinn von $\mathfrak{P}'$ aus auf dem Strahl durch $\mathfrak{O}$ nach $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}$, dann ist $\mathfrak{P}$ ein Punkt der Cramerschen Kurve, wie leicht zu beweisen ist.

Die eben gegebene Konstruktion erweitern wir nun dahin, daß wir anstatt der speziellen festen Geraden die allgemeine Gerade t' mit der Gleichung $-ax + by + ab = 0$ setzen, die in Fig. 8 konstruiert wurde.

Wir ziehen also in Fig. 11 durch O einen beliebigen Strahl, welcher den um O mit dem Radius R beschriebenen Kreis in $\mathfrak{G}$, die Gerade t' in P' schneidet, fällen von $\mathfrak{G}$ aus die Senkrechte $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_0$ auf die x-Achse und tragen das Stück $O\mathfrak{G}_0$ in dem oben angegebenen Sinn von P' aus auf dem Fahrstrahl nach $P'P$; dann ist P ein Punkt der Kurve t.

Denn die Polargleichung der Geraden t' ist

$$r = \frac{b \cdot (-a)}{b \sin v + (-a) \cos v}$$

und nach der Konstruktion wurde gemacht

$$r'' = OP = \bar{\bar{r}} - R \cos v;$$

dies ist die Gleichung 16).

Die Konstruktion der Kurve c mittels der beiden Kurven g und t ist nun die folgende:

Man zieht den zum Polarwinkel v gehörigen Fahrstrahl und bestimmt die beiden auf ihm liegenden Punkte der Kurven g und t. — Dies wurde in Fig. 8 bzw. Fig. 11 ausgeführt und beide Punkte als P_g und P_t in Fig. 12 übertragen. Macht man dann unter Beachtung der Vorzeichen $\mathfrak{O}P = \mathfrak{O}P_g + \mathfrak{O}P_t$, so ist P nach Gleichung 14[a]) ein Punkt der Kurve c.

Die vier Tangenten des vierfachen Punktes wurden aus Fig. 7 übertragen.

§ 6.

Spezialfälle der Kurve c.

I.

Die Gerade γ gehe als γ_I durch den Koordinatenanfang und habe die Gleichung

$$a\xi + b\eta = 0.$$

Ihr entspricht eine Kurve c_I von der sechsten Ordnung, die, den Schnittpunkten von γ_I mit der Fundamentalkurve entsprechend, im Koordinatenanfang einen vierfachen Punkt mit zwei reellen und zwei imaginären Zweigen besitzt.

Die Transformationsformeln ergeben für ihre Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten

$$17) \quad (x^2+y^2)(by-ax) + Rx(by-ax) = Rby\sqrt{x^2+y^2}$$

oder

$$\begin{aligned} 17') \quad & y^6[b^2] + y^5x[-2ab] + y^4x^2[a^2+2b^2] + y^3x^3[-4ab] \\ & + y^2x^4[b^2+2a^2] + yx^5[-2ab] + x^6[a^2] + y^4x[2Rb^2] \\ & + y^3x^2[-4abR] + y^2x^3[2R(a^2+b^2)] + yx^4[-4abR] \\ & + x^5[2a^2R] + y^4[-b^2R^2] + yx^3[-2abR^2] + x^4[a^2R^2] = 0 \end{aligned}$$

und für ihre Polargleichung

$$17^a) \qquad r = \frac{\frac{-Rb}{a} \cdot R}{\frac{-Rb}{a} \sin v + R \cos v} \cdot \sin v - R \cos v.$$

Nehmen wir γ_I parallel zur Geraden γ des vorigen Paragraphen, so ist hier die Kurve g dieselbe wie dort, während die Kurve t zum Kreis t_I mit der Gleichung $r'' = -R \cos v$ wird. Dieser Kreis hat den Mittelpunkt auf der negativen $x\xi$-Achse, den Durchmesser R und berührt die $y\eta$-Achse. Die Konstruktion der Kurve c_I ist die folgende:

Wir ziehen in Fig. 13 einen beliebigen Fahrstrahl, welcher den Kreis t_I im Punkte P_{t_I}, die Gerade g' im Punkte P' schneidet und fällen von P' aus das Lot $P'Q$ auf die $x\xi$-Achse. Macht man nun $\mathfrak{D}P_g = P'Q, P_gP = \mathfrak{D}P_{t_I}$, wobei diese Strecken in dem im vorigen Paragraphen definierten Sinn abzutragen sind, so ist P_g ein Punkt der Kurve g, P ein Punkt der Kurve c_I.

Die Konstruktion der Kurve g kann auch ausgeschaltet werden, weil vom Punkte P_{t_I} aus die Strecke $P_{t_I}P = P'Q$ abgetragen wird.

II.

Die Gerade γ sei als γ_{II} parallel zur ξ-Achse und habe die Gleichung

$$\eta = a.$$

Die Gleichung der entsprechenden Kurve c_{II} in rechtwinkligen Koordinaten wird erhalten, wenn man in der Gleichung $13^a)$ nach Division mit b^2 den Achsenabschnitt b unendlich groß werden läßt. Sie ist

$$18) \quad y^6 + 2y^4x^2 + y^2x^4 + 2ay^5 + 2Ry^4x + 4ay^3x^2 + 2Ry^2x^3 + 2ayx^4 + (a^2 - R^2)y^4 + 2aRy^3x + 2a^2y^2x^2 + 2aRyx^3 + a^2x^4 = 0.$$

Die Polargleichung wird

$$18^{a}) \qquad r = R + \left(- \frac{a}{\sin v} - R \cos v \right).$$

Die Kurven g und t haben hier die einfachen Polargleichungen

$$r' = R, \quad r'' = - \frac{a}{\sin v} - R \cos v,$$

während sich unter Umgehung dieser Kurven nach Gleichung 18^{a}) folgende einfache Konstruktion für die Kurve c_{II} angeben läßt:

Wir zeichnen in Fig. 14 zunächst den Kreis t_{II}^{0}, dessen Polargleichung $r = R \cos v$ ist, und dann die Parallele t_{II}^{00} zur $x\xi$-Achse im Abstande $-a$, welche die Polargleichung

$$r = \frac{-a}{\sin v}$$

hat.

Ein beliebiger Fahrstrahl schneidet nun den um den Koordinatenanfang $\mathfrak{O}$ mit dem Radius R beschriebenen Kreis im Punkte P', den Kreis t_{II}^{0} im Punkte P^{0} und die Parallele t_{II}^{00} im Punkte P^{00}. Wird nun in der Richtung $P^{0} - P^{00}$ von P' aus die Strecke $P^{0} P^{00}$ abgetragen, so ist der dadurch erhaltene Punkt P ein Punkt der Kurve c_{II}.

Die Kurve c_{II} ist ebenfalls von der sechsten Ordnung und besitzt im Koordinatenanfang einen vierfachen Punkt, von dem mindestens zwei Zweige imaginär sind.

Spezialfall der Kurve c_{II}.

Wir suchen die entsprechende Kurve zur ξ-Achse, am einfachsten unter Zuhilfenahme der Formeln 1) und 2). Für $\eta = 0$ ergeben die Formeln 2)

$$\text{a) } \varphi = 0,\ 180^{0}; \quad \text{b) } m = R.$$

Nach den Formeln 1) ergibt sich hieraus als entsprechendes Gebilde zur ξ-Achse a) die doppelt zählende x-Achse, b) die gemeine Kardioide $r = R(1 - \cos v)$, somit wieder eine Kurve sechster Ordnung.

III.

Die Gerade γ möge als γ_{III} parallel zur η-Achse verlaufen. Ihre Gleichung ist

$$\xi = b.$$

Die Gleichung der entsprechenden Kurve c_{III} in rechtwinkligen Koordinaten wird dann

19) $$y^4 x^2 + 2 y^2 x^4 + x^6 - 2 b y^4 x + 2 (R - 2 b) y^2 x^3 + 2 (R - b) x^5 + b^2 y^4 + 2 b (b - R) y^2 x^2 + (b - R)^2 x^4 = 0.$$

Wie man sich durch Quadrieren überzeugt, läßt sich diese Gleichung auch so schreiben

19a) $$[x (x^2 + y^2) + x^2 (R - b) - b y^2]^2 = 0.$$

Der Parallelen zur η-Achse im Abstande b entspricht also doppelt die im vorigen Paragraphen erwähnte und in Fig. 9 gezeichnete Cramer'sche Kurve.

Läßt man im speziellen Falle $b = 0$ werden, so erhält man als entsprechendes Gebilde zur η-Achse a) die doppelt zählende y-Achse, b) den ebenfalls doppelt zählenden Kreis $x^2 + y^2 + R x = 0$, den Rollkreis p_0 im ebenen System S.

Wählt man dagegen $b = R$, so stellt die Gleichung 19a) die doppelt zählende Kurve $x (x^2 + y^2) - R y^2 = 0$ dar.

Einer Parallelen zur η-Achse im Abstand R entspricht daher doppelt die Cissoide des Diokles, die also hier als Spezialfall der Cramer'schen Kurve erscheint.

§ 7.

Die Kurve des ebenen Systems Σ, welche einer Geraden des Systems S entspricht.

Mittels der Formeln 3) ist es möglich, zu der Gleichung jeder Kurve, $\varphi(\xi,\eta)=0$, die der entsprechenden Kurve, $f(x,y)=0$, zu bestimmen. Sucht man sich Formeln zu verschaffen, mit denen man das Umgekehrte leisten kann, in denen also x und y als Funktionen von ξ und η dargestellt sind, so kommt man dabei stets auf eine Gleichung vierten Grades, die die Herleitung praktisch verwendbarer Formeln dieser Art unmöglich macht.

Liegt nun die Gleichung einer Kurve des Systems S, $f(x,y)=0$, vor, so kann dieselbe mittels der Formeln 1) in den krummlinigen Koordinaten m, φ geschrieben werden; sie heiße dann $f'(m,\varphi)=0$. Die Gleichung $\varphi(\xi,\eta)=0$ der entsprechenden Kurve des Systems Σ ist jetzt das Eliminationsresultat von m und φ aus den drei Gleichungen

$$2)\quad \begin{cases} \xi = m\cos\varphi \\ \eta = (R-m)\sin\varphi \\ f'(m,\varphi)=0. \end{cases}$$

Diese Elimination ist nur in seltenen Fällen praktisch möglich, sodaß es in der Regel nicht gelingt, zu einer vorgegebenen Kurvengleichung $f(x,y)=0$ die entsprechende Gleichung $\varphi(\xi,\eta)=0$ zu bilden.

Schon in dem einfachen Fall einer allgemein gegen das Koordinatensystem xy oder auch parallel zur x-Achse gelegenen Geraden ist die Elimination praktisch nicht durchführbar. Es gelingt nur, die Gleichungen der entsprechenden Gebilde zu folgenden Geraden des Systems S aufzustellen:

I. zur x-Achse,
II. zur y-Achse,
III. zu einem Fahrstrahl,
IV. zu einer Parallelen zur y-Achse.

I. und II.

Die Gleichung der x-Achse, $y = 0$, gibt zusammen mit den Formeln 1) die beiden Bedingungen

a) $m - R\cos\varphi = 0$,

b) $\varphi = 0^0,\ 90^0$,

welche zusammen mit den Formeln 2)

a) die Fundamentalkurve ω,

b) die doppelt zählende ξ-Achse

bestimmen.

Der x-Achse entspricht also die zweimal zählende ξ-Achse und außerdem die Fundamentalkurve ω, zusammen eine Kurve sechster Ordnung.

Auf dieselbe Weise findet man, daß der y-Achse die η-Achse doppelt und außerdem auch die Fundamentalkurve entspricht.

III.

Ein beliebiger Fahrstrahl des Systems S hat die Gleichung

$$\frac{y}{x} = c.$$

Für $m - R\cos\varphi = 0$ ist diese Gleichung erfüllt. da hierfür nach den Formeln 1) $\frac{y}{x}$ unbestimmt wird, also jeden Wert annehmen kann. Dem Fahrstrahl entspricht daher zunächst die Fundamentalkurve ω. Außerdem ergibt die Gleichung $\frac{y}{x} = c$ zusammen mit den Formeln 1) noch die Bedingung $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi$, welche in die zwei Bedingungen zerfällt

a) $\varphi_1 = \operatorname{arctg} c = v$,

b) $\varphi_2 = 180^0 + \operatorname{arctg} c = 180^0 + v$,

wenn man $\operatorname{arctg} c = v$ setzt.

Jede dieser Gleichungen nehmen wir mit den Formeln 2) zusammen und erhalten

a) $\xi = m \cos v, \qquad \eta = (R - m) \sin v,$

b) $\xi = -m \cos v, \quad \eta = (m - R) \sin v.$

m ist in den beiden Fällen zu eliminieren.

Man erhält dann

a) $\eta = -\operatorname{tg} v \cdot \xi + R \sin v,$

b) $\eta = -\operatorname{tg} v \cdot \xi - R \sin v.$

Das sind aber die Gleichungen zweier paralleler Tangenten an die Astroide δ in Σ.

Einem Fahrstrahl in S unter dem Richtungswinkel v entsprechen also außer der Fundamentalkurve ω noch zwei parallele Tangenten an die Astroide δ in Σ unter dem Richtungswinkel $180^0 - v$, zusammen eine Kurve sechster Ordnung.

IV.

$x - c = 0.$

Dieser Parallelen l zur y-Achse entspricht die Kurve λ, welche durch die drei Gleichungen bestimmt ist

$$20) \qquad \begin{cases} \xi = m \cos \varphi \\ \eta = (R - m) \sin \varphi \\ (m - R \cos \varphi) \cos \varphi - c = 0. \end{cases}$$

Um die Gleichung der Kurve λ in rechtwinkligen Koordinaten zu erhalten, ist aus den Gleichungen 20) m und φ zu eliminieren. Aus der dritten Gleichung bekommt man

$$m = R \cos \varphi + \frac{c}{\cos \varphi};$$

setzt man diesen Wert in die erste Gleichung ein, so entsteht die Gleichung

$$\xi = R \cos^2 \varphi + c,$$

woraus sich $\cos \varphi$ ergibt

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{\xi - c}{R}};$$

dann ist

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{R+c-\xi}{R}} \quad \text{und} \quad m = \sqrt{R}\,(\sqrt{\xi-c}) + \frac{c\sqrt{R}}{\sqrt{\xi-c}}.$$

Diese Werte führen wir in die zweite Gleichung ein und erhalten für die Kurve λ die Gleichung in rechwinkligen Koordinaten

$$20^{a}) \quad \eta = R\sqrt{\frac{R+c-\xi}{R}} - \sqrt{(\xi-c)(R+c-\xi)} - c\sqrt{\frac{R+c-\xi}{\xi-c}},$$

oder

$$\eta\sqrt{\xi-c} = \sqrt{R+c-\xi}\,[\sqrt{R(\xi-c)} - \xi].$$

Die Quadrierung liefert eine Gleichung vom sechsten Grad.

Einer Parallelen zur y-Achse entspricht daher eine Kurve sechster Ordnung, die symmetrisch zur ξ-Achse verläuft.

Die in § 3 gegebene Konstruktion des einem Punkte in S entsprechenden Punktepaares in Σ gestattet die Kurve λ auf folgende einfache Weise zu zeichnen:

Wir ziehen in Fig. 15 einen beliebigen Fahrstrahl, welcher den um $\mathfrak{O}$ mit dem Radius $\frac{1}{2}R$ beschriebenen Kreis in $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$, den mit dem Radius R um $\mathfrak{O}$ beschriebenen Kreis in $\mathfrak{U}$ und die gegebene Gerade l in A schneidet. Hierauf fällen wir von $\mathfrak{U}$ aus die Senkrechte $\mathfrak{U}\mathfrak{U}_0$ auf die $x\xi$-Achse und tragen nach der im § 3 gegebenen Regel das Stück $\mathfrak{O}\mathfrak{U}_0$ von A aus auf dem Fahrstrahl ab, wodurch wir den Punkt $\mathfrak{N}$ erhalten. Die durch $\mathfrak{N}$ gezogene Senkrechte zur $x\xi$-Achse schneidet die Verbindungslinie $\mathfrak{M}\mathfrak{U}_0$ und die Parallele zu ihr durch $\mathfrak{M}'$ in den zwei Punkten A_1, A_2 der Kurve λ.

§ 8.

Zwei Kreisscharen des Systems S und ihre entsprechenden Kurvenscharen in dem System Σ.

Die eingangs des vorigen Paragraphen angedeutete Elimination gelingt auch für die Kreise zweier Kreisscharen des ebenen Systems S, deren entsprechenden Kurvenscharen in diesem Paragraphen betrachtet werden sollen.

A. Der Kreisschar s, welche die Gleichung

$$x^2 + y^2 = C^2$$

hat, entspricht, weil diese Schar in den Koordinaten m, φ die Gleichung $m - R\cos\varphi = \pm C$ besitzt, die Kurvenschar σ, welche durch die drei Gleichungen bestimmt ist

21)
$$\begin{cases} \xi = m\cos\varphi \\ \eta = (R - m)\sin\varphi \\ m - R\cos\varphi = \pm C. \end{cases}$$

Die Gleichung der Schar σ in rechtwinkligen Koordinaten erhält man hieraus durch die Elimination von m und φ.

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt

$$m^4 - 2m^3 R + m^2(R^2 - \xi^2 - \eta^2) + 2mR\xi^2 - R^2\xi^2 = 0,$$

während die erste und letzte Gleichung zusammen ergeben

$$m^2 \mp mC - R\xi - 0.$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen den Parameter m, so entsteht als Resultat die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -2R & R^2-\xi^2-\eta^2 & 2R\xi^2 & -R^2\xi^2 & 0 \\ 0 & 1 & -2R & R^2-\xi^2-\eta^2 & 2R\xi^2 & -R^2\xi^2 \\ 1 & \mp C & -R\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mp C & -R\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mp C & -R\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mp C & -R\xi \end{vmatrix} = 0.$$

Rechnet man diese Determinante aus, so erhält man folgende Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten für die Kurvenschar σ:

$$\begin{aligned}21^a) \quad & (\eta^2+\xi^2)^2 \pm 2\eta^2\xi C + 2\xi^3(\pm C - 2R) + 2R\eta^2(\pm C - R) \\ & + 6R\xi^2(R \mp C) + 2\xi[\mp C^3 + R^2(\pm 3C - 2R)] \\ & + R^4 - C^4 \pm 2CR(C^2 - R^2) = 0.\end{aligned}$$

Schreiben wir die beiden hierin enthaltenen Gleichungen getrennt, so stellt jede derselben die vollständige Schar σ dar, wenn wir für C jeden Wert zulassen. Nimmt man aber C nur positiv, so ist die Schar σ dadurch in die zwei Teilscharen σ' und σ'' gespalten, deren Gleichungen bzw. sind

$$\begin{aligned}21') \quad & (\eta^2+\xi^2)^2 + 2\eta^2\xi C + 2\xi^3(C - 2R) + 2R\eta^2(C - R) \\ & + 6R\xi^2(R - C) + 2\xi[-C^3 + R^2(3C - 2R)] \\ & + R^4 - C^4 + 2CR(C^2 - R^2) = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}21'') \quad & (\eta^2+\xi^2)^2 - 2\eta^2\xi C - 2\xi^3(C + 2R) - 2R\eta^2(C + R) \\ & + 6R\xi^2(R+C) + 2\xi[C^3 - R^2(3C + 2R)] + R^4 - C^4 \\ & - 2CR(C^2 - R^2) = 0.\end{aligned}$$

Wir transformieren nun die Schar σ' auf ein neues Achsensystem mittels der Formeln

$$\xi = \xi' + (R - C), \quad \eta = \eta'.$$

Desgleichen werde die Schar σ'' auf ein zweites neues Achsensystem bezogen durch die Formeln

$$\xi = \xi'' + (R + C), \quad \eta = \eta''.$$

Man erhält dann für die beiden Scharen σ' und σ'' bzw. folgende Gleichungen:

$$22) \quad (\eta'^2 + \xi'^2)^2 + 2\xi'[\eta'^2(2R - C) - \xi'^2 C] = 0$$

$$23) \quad (\eta''^2 + \xi''^2)^2 + 2\xi''[\eta''^2(2R + C) + \xi''^2 C] = 0.$$

Schließlich führen wir noch in jedem dieser neuen Achsensysteme Polarkoordinaten ein und bekommen als Polargleichung für die Schar σ'

22a) $$\varrho' = 2\,C\cos\nu' - 4\,R\sin^2\nu'\cos\nu',$$

also solche für die Schar σ''

23a) $$\varrho'' = -2\,C\cos\nu'' - 4\,R\sin^2\nu''\cos\nu''.$$

Der Kreisschar s des ebenen Systems S entspricht also die Schar σ der Brocard'schen Fußpunktkurven[1]), und zwar derart, daß jedem Kreis zwei Brocard'sche Kurven, eine von der Teilschar σ' und eine von der Teilschar σ'', zugeordnet sind, deren Gleichungen sich nur in dem Vorzeichen der Konstanten C unterscheiden.

Die ξ-Achse schneidet jede Brocard'sche Kurve in ihrem dreifachen und einem einfachen Punkt. Wie die Gleichungen erkennen lassen, sind die zwei demselben Kreis entsprechenden Kurven so gelegen, daß der dreifache Punkt der einen sich mit dem erwähnten einfachen Punkt der anderen deckt. Die Entfernung beider dreifacher Punkte ist daher immer $= 2\,C$.

Die eine Kurve des entsprechenden Kurvenpaares ist in ihrem dreifachen Punkt stets so gestaltet, daß nur ein Zweig desselben reell ist, denn sämtliche Kurven der Schar σ'' sind von dieser Art, wie man aus Gleichung 23) ersieht. Die andere Kurve ist dagegen in ihrem dreifachen Punkt nur dann ebenso beschaffen, wenn $C > 2\,R$ ist; ist dagegen $C < 2\,R$, so stoßen in dem dreifachen Punkt drei Blätterspitzen zusammen, wie aus Gleichung 22) folgt.

Die Schar σ' enthält sämtliche Kurven, welche als spezielle Brocard'sche Kurven bezeichnet werden können:[1])

$C = 0$; beide entsprechenden Kurven gehen in das gerade Zweiblatt über.

$C = \frac{R}{2}$; die entsprechende Kurve der Teilschar σ' wird ein reguläres Trifolium $\varrho' = R\cos 3\,\nu'$.

[1]) Loria, a. a. O., S. 160 und 161.

$C = R$; die entsprechende Kurve der Schar σ' ist ein gerades Dreiblatt $\varrho' = 2\,R\cos\nu' - 4\,R\sin^2\nu'\cos\nu'$.

$C = 2\,R$; die entsprechende Kurve der Schar σ' ist die sekundäre Proportionatrix $\varrho' = 4\,R\cos^3\nu'$.

Da wir nach § 3 zu jedem Punkt des ebenen Systems S das entsprechende Punktepaar A_1, A_2 in Σ konstruieren können, so ist hiermit auch eine Konstruktion für die allgemeine Brocard'sche Fußpunktkurve gegeben. Dieselbe ist in Fig. 16a und Fig. 16b für die beiden Fälle durchgeführt, daß der Radius C des gegebenen Kreises b_s einmal kleiner, das andere Mal größer als $2\,R$ gewählt wurde. Die beiden entsprechenden Brocard'schen Kurven sind mit $\beta_{\sigma'}$ bzw. $\beta_{\sigma''}$ bezeichnet. Dabei wurde die Fig. 16b in der Hälfte des sonst verwendeten Maßstabes gezeichnet.

Erwähnenswert ist noch, daß hier die Punkte $\mathfrak{N}$ eine Kardioide $\mathfrak{k}$ erfüllen, die im Koordinatenanfang ihren Doppelpunkt besitzt.

B. Die Kreisschar $\bar{s}$ der Gleichung

$$x^2 + y^2 - Cx = 0 \quad \text{oder} \quad r = C\cos v$$

hat in den Koordinaten m, φ die Gleichung

$$m - R\cos\varphi = C\cos\varphi \quad \text{oder} \quad m = \cos\varphi \cdot c,$$

wenn man $c = C + R$ setzt.

Die Gleichung der entsprechenden Kurvenschar σ in rechtwinkligen Koordinaten wird durch Elimination von m und φ aus den drei Gleichungen erhalten

24)
$$\begin{cases} \xi = m\cos\varphi \\ \eta = (R - m)\sin\varphi \\ m = c\cos\varphi. \end{cases}$$

Die Elimination gestaltet sich einfach und ergibt

24a) $$\eta \cdot c = \sqrt{c - \xi}\,[R\sqrt{c} - c\sqrt{\xi}].$$

Durch Quadrieren erhält man

$$24^{b}) \quad \begin{aligned} &c^2(\eta^2+\xi^2)^2+2c\xi[\eta^2(R^2-c^2)-\xi^2(R^2+c^2)]-2\eta^2R^2c^2 \\ &+\xi^2(R^4+c^4+4R^2c^2)-2\xi cR^2(R^2+c^2)+R^4c^2=0. \end{aligned}$$

Wir transformieren nun auf ein neues Achsensystem mittels der Formeln

$$\xi=\xi'+\frac{R^2}{c}, \quad \eta=\eta'$$

und erhalten die Gleichung

$$25) \quad \begin{aligned} &c^2(\eta'^2+\xi'^2)^2+2\eta'^2\xi'c(3R^2-c^2)+2\xi'^3c(R^2-c^2) \\ &+4\eta'^2R^2(R^2-c^2)+\xi'^2(R^2-c^2)^2=0. \end{aligned}$$

Die Kurve der Schar $\bar{\sigma}$ mit der Konstanten c hat also im Punkt $\xi=\frac{R^2}{c}$, $\eta=0$ einen Doppelpunkt, dessen Tangentenrichtungen aus der Gleichung

$$\left(\frac{\eta'}{\xi'}\right)^2=\frac{c^2-R^2}{4R^2}$$

bestimmt werden.

Die Gleichung $24^{a})$ kann auch in der Form geschrieben werden

$$\eta=\frac{R}{\sqrt{c}}\sqrt{c-\xi}-\sqrt{c\xi-\xi^2},$$

woraus wir erkennen, daß die Kurven der Schar $\bar{\sigma}$ in die Reihe der polyzomalen symmetrischen Kurven vierter Ordnung gehören.[1]) Der Punkt $\xi=c$, $\eta=0$ ist Berührungsknoten für die Kurve der Schar mit der Konstanten c.

Entsprechend der Eigenschaft als polyzomale symmetrische Kurven können wir die Gleichung 25) ihrer Schar auch in der Form der Gleichung (3)[1]) schreiben; sie heißt dann

$$25^{a}) \quad \begin{aligned} &\eta'^4\cdot c^2+2\eta'^2[c^2\xi'^2+c\xi'(3R^2-c^2)+2R^2(R^2-c^2)] \\ &+[c\xi'^2+\xi'(R^2-c^2)]^2=0. \end{aligned}$$

---

[1]) Loria, a. a. O., S. 170 und 171.

Wie die Gleichung für die Doppelpunktstangenten erkennen läßt, ist der Doppelpunkt reell, wenn der Durchmesser C des gegebenen Kreises größer als 0 oder kleiner als $-2R$ ist. Für $C = 0$ erhalten wir die Fundamentalkurve ω, während für einen Durchmesser C zwischen den Grenzen 0 und $-2R$ der Punkt $\xi = \frac{R^2}{c}$, $\eta = 0$ ein isolierter Punkt wird.

Des weiteren ersieht man noch aus den Gleichungen, daß sämtliche Kurven der Schar σ durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte gehen.

In der Fig. 17a ist die entsprechende Kurve β_σ der Schar σ, welche einem positiven C, in Fig. 17b jene, welche einem zwischen 0 und $-2R$ gelegenen C zugehört, gezeichnet, indem wieder nach § 3 die den Punkten des gegebenen Kreis b_s entsprechenden Punktepaare konstruiert wurden. Dabei dient als Kontrolle, das die Punkte $\mathfrak{N}$ auf einem Kreis f mit der Polargleichung $r = c \cos v$ liegen müssen.

Anhang.

Über den Zusammenhang der Blätter in den beiden ebenen Systemen S und Σ.

Die betrachtete Verwandtschaft zwischen den beiden ebenen Systemen S und Σ ist zwei-vierdeutig. Eindeutigkeit kann man aber dadurch erzielen, daß man in der Art, wie es bei den Riemann'schen Flächen geschieht, das System S mit zwei, das System Σ mit vier Blättern überdeckt.[1]) Auf diese wichtige Darstellung der Verwandtschaft soll noch kurz eingegangen werden.

Wird in dem einen der beiden Systeme ein Punkt angenommen, so muß jetzt gleichzeitig bestimmt werden, in welchem der überdeckenden Blätter er liegen soll; je nachdem ist ihm dann ein Punkt der entsprechenden Punktgruppe des anderen Systems eindeutig zugeordnet. Wenn nun bei der Bewegung des Punktes des einen Systems über gewisse Linien oder Punkte hinweg von den entsprechenden Punkten des anderen Systems zwei zusammenfallen und dabei ineinander übergehen bzw. sich gegenseitig austauschen, so hängen die entsprechenden Blätter des ersten Systems zusammen. Dementsprechend hängen die zwei Blätter des Systems S im Koordi-

[1]) Vgl. S. Finsterwalder, Über Brennflächen und die räumliche Verteilung der Helligkeit bei Reflexion eines Lichtbündels an einer spiegelnden Fläche. Dissertation. Tübingen 1886, S. 8.

Desgl. S. Finsterwalder, Die von optischen Systemen größerer Öffnung und größeren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. Abhandlungen der K. Bayer. Akademie der Wiss. II. Kl. XVII. Bd. III. Abt., § 4. S. 554.

natenanfang zusammen, während bei dem System Σ, welches innerhalb der Astroide δ von vier, außerhalb derselben von zwei reellen Blättern überdeckt wird, ein Zusammenhang dieser Blätter längs der Astroide δ stattfindet.

Wir wollen nun noch die Kurve d_1 des Systems S bestimmen, welche der Astroide δ als Zusammenhangskurve der Blätter des Systems Σ entspricht.

Als Kurve des Systems Σ an sich entspricht der Astroide δ eine Kurve d, deren Gleichung mit Hilfe der Formeln 3) angeschrieben werden kann. Diese Kurve d zerfällt in zwei Teile d_1 und d_2, wobei ersterer die entsprechende Kurve zu δ als der erwähnten Zusammenhangskurve ist. Die Kurve d ist in Fig. 18 nach § 3 konstruiert. Für den Teil d_1 ist diese Konstruktion sehr einfach mit Zirkel und Lineal durchführbar, und entsprechend dieser Konstruktion kann auch die Gleichung der Kurve d_1 ohne Zuhilfenahme der Formeln 3) abgeleitet werden.

Wir machen in Fig. 18 die Strecke $\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{Q}_{12}$ gleich R, halbieren dieselbe im Punkte $\mathfrak{M}_{12}$ und ziehen $\mathfrak{O}\mathfrak{M}_{12}$ bis zum Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ mit dem um $\mathfrak{O}$ mit dem Radius R beschriebenen Kreis. Die Senkrechte von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{Q}_{12}$ bestimmt auf dieser Strecke den Punkt A der Astroide δ. Wird hierauf nach § 3

$$\mathfrak{O}A_{12} = -\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{U} = \mathsf{A}\mathfrak{P}_{12} - \mathfrak{O}\mathfrak{Q}_{12}$$

gemacht, so ist A_{12} ein Punkt der Kurve d_1.

Die Gleichung der Kurve d_1 erhalten wir auf folgende Weise:

Ist v der Winkel des Fahrstrahles $\mathfrak{O}\mathfrak{P}$ mit der ξ-Achse, so sind die Koordinaten des Astroidenpunktes A, ausgedrückt durch v als Parameter

$$\xi = R\cos^3 v$$
$$\eta = R\sin^3 v.$$

Die Koordinaten des Punktes $\mathfrak{P}_{12}$ sind

$$\xi = 0, \quad \eta = R\sin v.$$

Die Gleichung

$$r = \mathfrak{O}A_{12} = \mathsf{A}\mathfrak{P}_{12} - \mathfrak{O}\mathfrak{Q}_{12} = \mathsf{A}\mathfrak{P}_{12} - R\cos v = f(v)$$

ist dann die Gleichung der Kurve d_1 in den Polarkoordinaten r, v.

Nach einiger Rechnung erhält man hieraus die einfache Form

26) $$r + R\cos v + R\cos^2 v = 0,$$

während die Gleichung der Kurve d_1 in rechtwinkligen Koordinaten

26a) $$(x^2 + y^2)^3 + 2\,x\,R(x^2 + y^2)^2 + R^2 x^2 y^2 = 0$$

ist.

Die Kurve d_1 ist also von der sechsten Ordnung und hat im Koordinatenanfang einen vierfachen Punkt, dessen Tangenten in die x- und y-Achse fallen. Eine nähere Untersuchung ergibt, daß dort eine gewöhnliche Spitze und ein Berührungsknoten vereinigt liegen.

Die Kurve d_1 hat nun für die Verwandtschaft folgende Bedeutung.

Beschreibt der Punkt A eine Kurve in dem System Σ und überschreitet er dabei die Astroide δ, so gehen von den vier Kurvenzweigen des Systems S, welche die entsprechenden Punkte zu A beschreiben, zwei in einem Punkte der Kurve d_1 ineinander über, ohne einen singulären Punkt zu bilden.

Wenn umgekehrt ein Punkt A des Systems S eine Kurve beschreibt und dabei die Kurve d_1 überschreitet, so berührt die entsprechende Kurve im System Σ die Astroide δ.

Fig. 1.

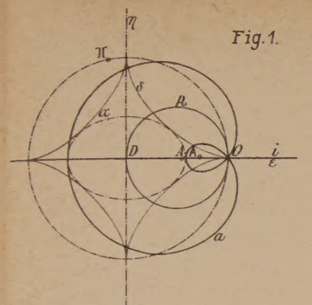


Fig. 2.

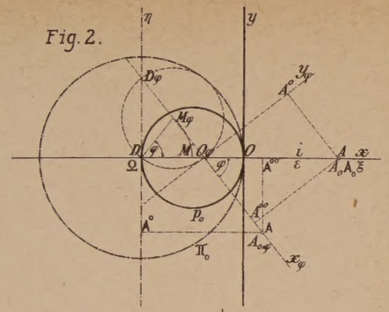


Fig. 3.

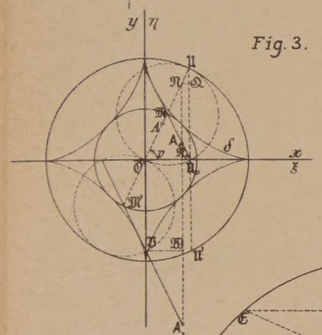


Fig. 4.

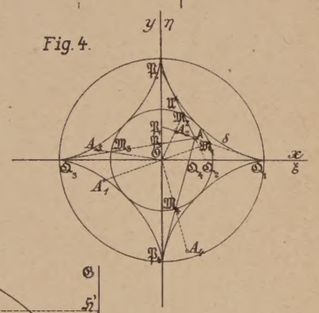


Fig. 5.

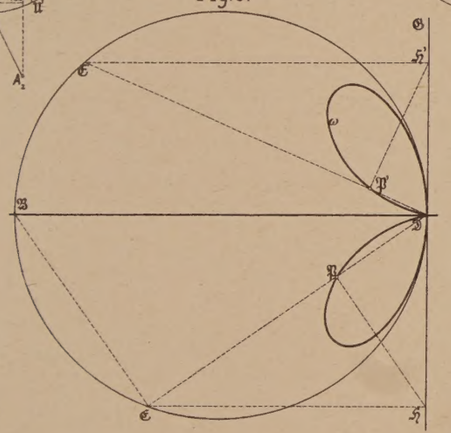


Fig. 6.

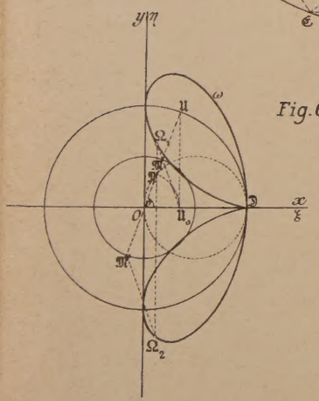


Fig. 7.

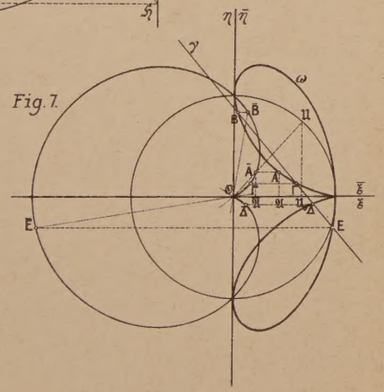


Fig. 8.

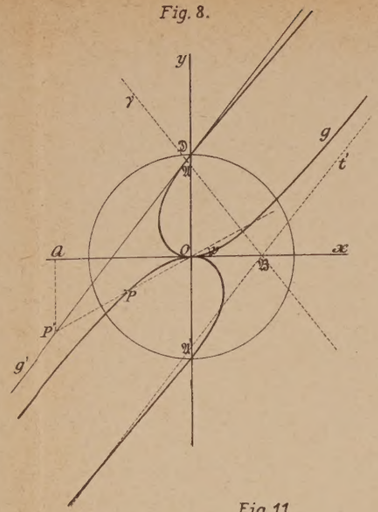


Fig. 9.

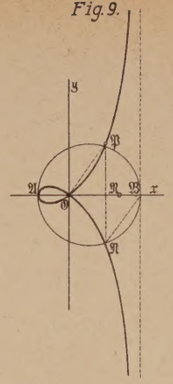


Fig. 10.

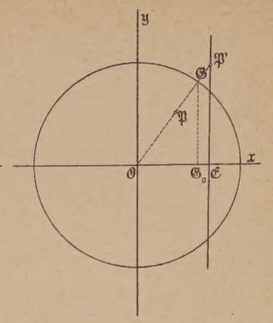


Fig. 11.

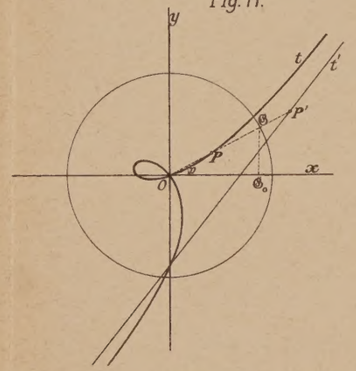


Fig. 12.

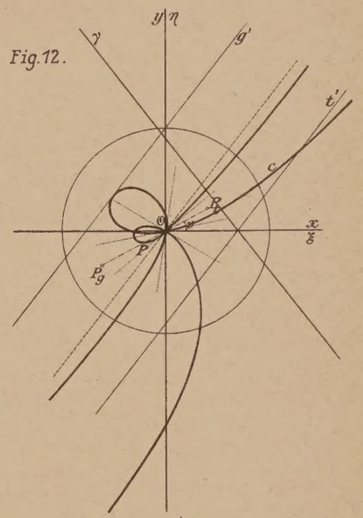


Fig. 13.

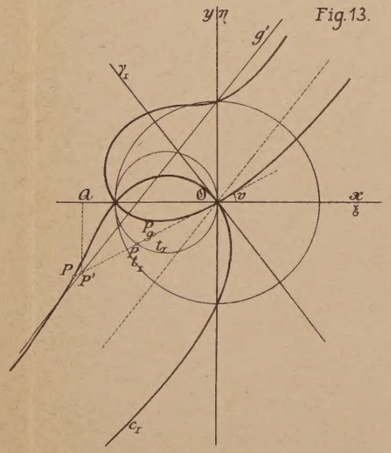


Fig. 14.

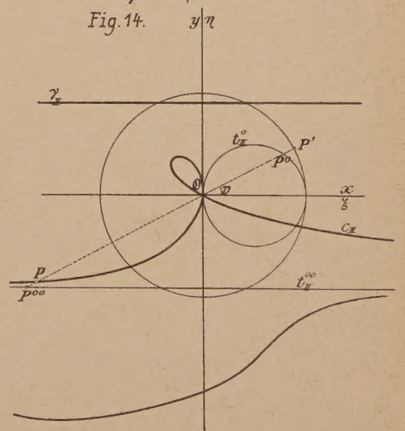


Fig. 16a.

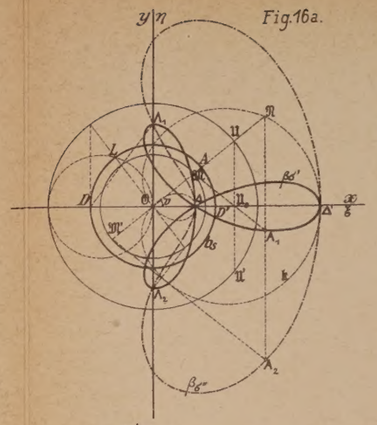


Fig. 16 b.
M. 1:2

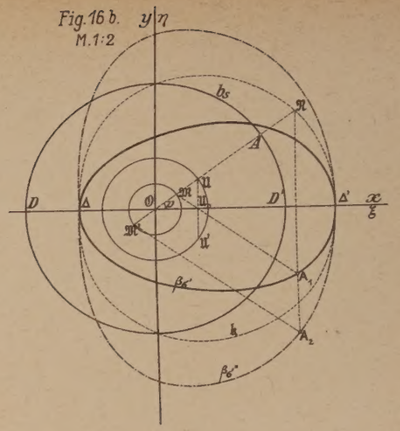


Fig. 17a.

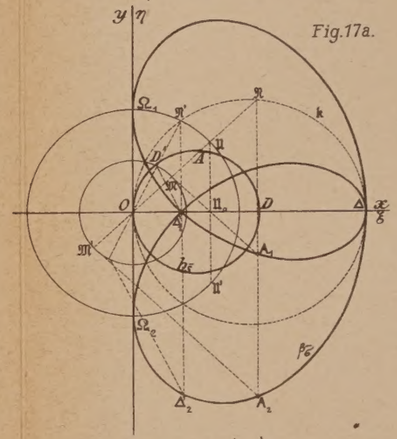


Fig. 17 b.

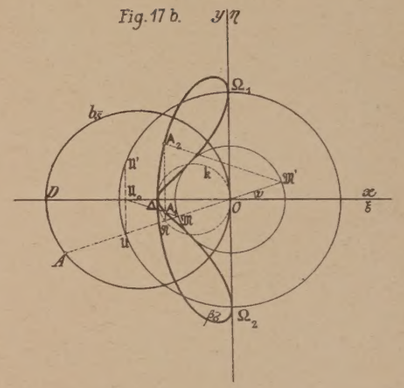


Fig. 15.

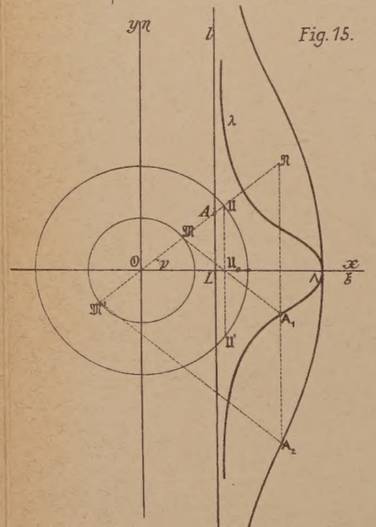
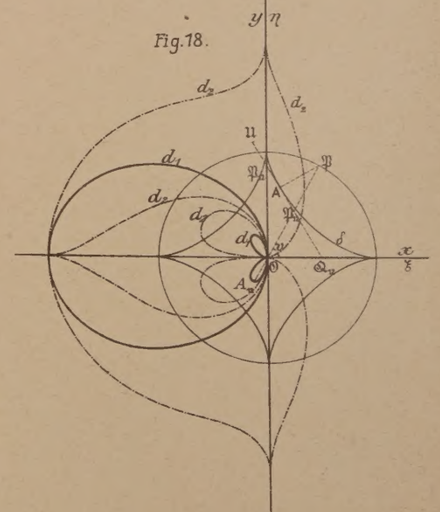


Fig. 18.



Lith. Anst. v. Hubert Köhler, München